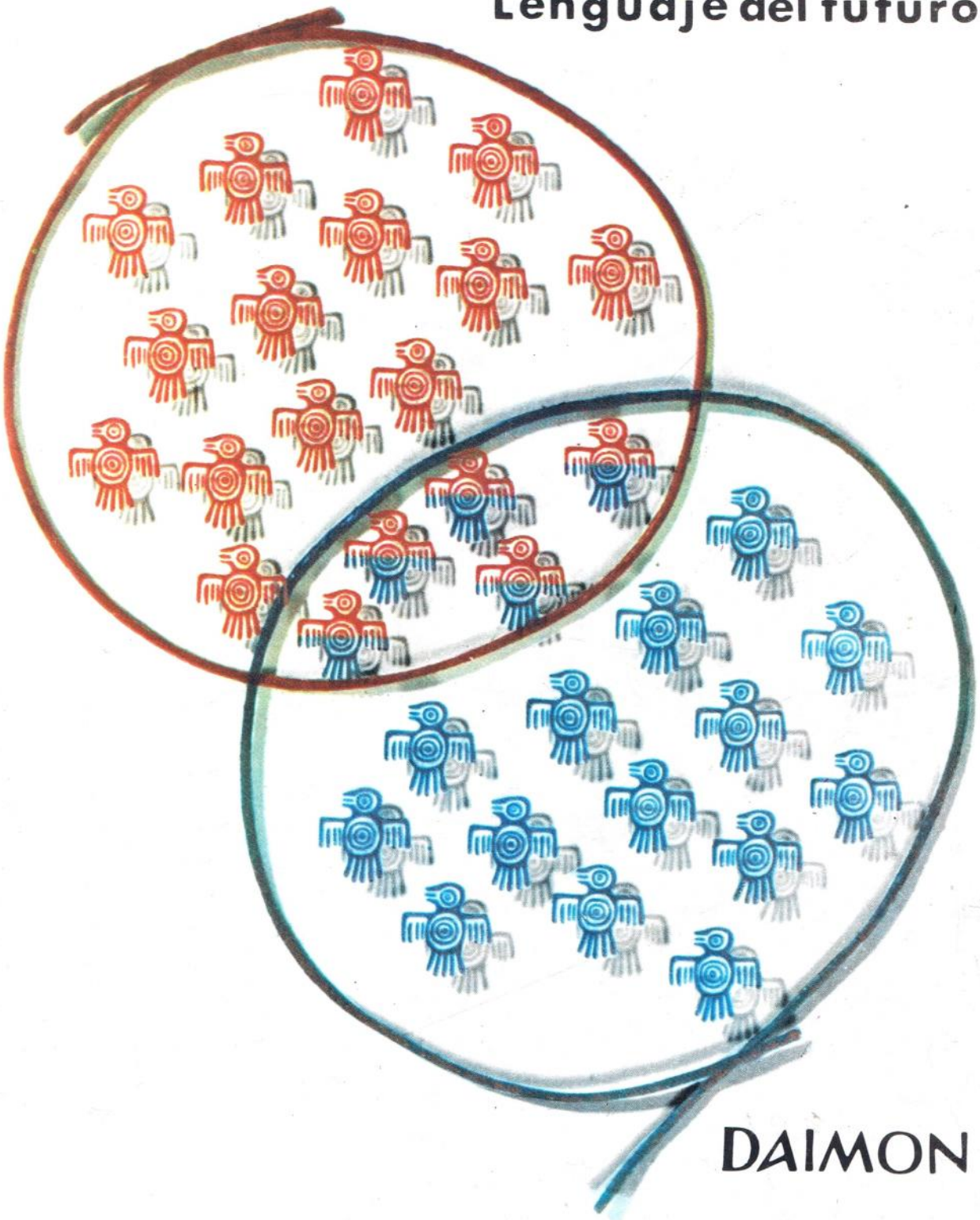
Entender la

MATEMATICA MODERNA

Lenguaje del futuro



DAIMON

matemática moderna

GEORGES VAN HOUT

matemática moderna

Lenguaje del futuro

DAIMON

MADRID - BARCELONA - MEXICO

Título de la edición original:
MATHÉMATIQUE MODERNE, LANGAGE DU FUTUR
Imprimeries Nauwelaerts, S. A., Louvain (Bélgica)

Traducción de:
J. A. PEÑA y M.ª PILAR HERRERO DE PEÑA
Licenciados en Ciencias Matemáticas

Maqueta de:
J. UBACH

ISBN 84-231-0850-3
Depósito legal: 35613-73

© 1971, por Imprimeries Nauwelaerts, S. A., Louvain (Bélgica)
y por cesión de dicha firma para España y países de habla española,
1973, por Ediciones Daimon, Manuel Tamayo, Barcelona (España)

Printed in Spain

Imprenta Juvenil. Maracaibo, 9. Barcelona-16

Nadie sabrá entender el gran libro del Universo si ignora su lenguaje, el lenguaje matemático. (Galileo.)

AGRADECIMIENTO

El autor agradece a cuantos
con él han colaborado, dibujantes,
técnicos e impresores, el interés
y el cuidado que han puesto
en la confección de esta obra.

PROLOGO A LA EDICION ESPAÑOLA

El autor de este libro es bastante explícito al afirmar que «no quiso hacer un curso». Para enseñar Matemática Moderna a los estudiantes, tanto a nivel medio como superior, existen ya bastantes manuales y tratados que se ocupan en plan didáctico de dicha materia.

El verdadero propósito de la obra que hoy presentamos es mucho más sutil. Pretende, nada menos, despertar en el lector adulto, todavía aferrado al concepto tradicional de la matemática clásica, un espíritu más abierto a la comprensión de este nuevo enfoque de la vida.

No es una exageración. La Matemática Moderna ha roto los viejos moldes rigoristas del «dos y dos son cuatro». Va mucho más lejos. La Matemática Moderna es una ciencia ágil, dinámica —y por lo tanto viva—, contraria a todo inmovilismo dogmático e institucionalista. Es, en suma, toda una filosofía que nos enseña a hacer uso del razonamento y de la lógica, a juzgar con sentido crítico los fallos de nuestro viejo sistema cultural.

Las operaciones de «conjuntos» superan ampliamente aquellas «cuatro reglas», cuyas tablas aprendían los niños de antaño cantando a coro.

Desde que el hombre existe, ha construido máquinas para que le ayuden. El hombre de hoy ha fabricado ordenadores: máquinas capaces de razonar en su lugar. Razonar es tanto como «calcular lógicamente»; no es lo mismo que «imaginar», «crear» o «criticar». El lenguaje de los ordenadores está basado en la Matemática Moderna.

La presente obra va dirigida, pues, en primer lugar a esta generación de padres a quienes no alcanzó la enseñanza de esta disciplina, pero que son todavía lo bastante jóvenes de espíritu para interesarse en ella, aunque sólo sea para entablar un diálogo constructivo con sus hijos, sin cerrarse en banda, sin recurrir al consabido «déjate de monsergas...».

También los profesores de Matemática Moderna hallarán un precioso auxiliar en ella, puesto que el autor señala los principales escollos, la interpretación dudosa, el concepto erróneo que más suele entorpecer a los estudiantes.

Unos y otros descubrirán, con su lectura, el vasto y prometedor panorama de sabrosos comentarios, sugerencias y observaciones que el autor despliega a lo largo de las siguientes páginas.

EL EDITOR

INTRODUCCION

El estudio de las matemáticas, que comprime la sensibilidad y la imaginación, hace a veces terrible la explosión de las pasiones.

Monseñor Dupanloup (1855)

1

Los historiadores hace tiempo que convinieron en cerrar la Edad Media en 1453, fecha de la toma de Constantinopla por los turcos y han llamado «Edad Moderna» al período consecutivo. Así, las guerras de religión del siglo XVI, el reinado de Luis XIV o el de Catalina II pertenecen a la «Edad Moderna» de la Historia.

Y después, un buen día, se encontraron con la Revolución francesa en los brazos. Como que se trataba, evidentemente, de un viraje de la Historia, acordaron que todo lo que ocurriera después de 1789 pertenecería a la «Historia contemporánea». Por tanto, la derrota de Napoleón en Waterloo, es un hecho de la Historia contemporánea; como también el primer alunizaje del hombre el 21 de julio de 1969. La palabra «moderna» se devalúa con el paso del tiempo. Lo que, en la coyuntura actual, se llama «matemática moderna», encierra en realidad algunos fragmentos de la matemática de los siglos XVII, XVIII y XIX e incluso, toda la matemática de la Edad Media y de la Antigüedad. Para expresarnos con más precisión, habría que hablar de una «moderna pedagogía de la matemática actual» que es lo que trae consigo esta reforma que, para los espíritus malhumorados, adquiere caracteres de revolución.

2

No hemos querido «hacer un curso». Los que deseen seguirlo pueden consultar las obras especializadas y también los manuales de sus propios hijos.

Sólo hemos querido presentar lo esencial de esta transformación cultural, aunque de una manera no muy rigurosa por falta de lugar y tiempo. Hemos intentado desbrozar la mayor parte de los malentendidos, de los juicios erróneos, de las interpretaciones defectuosas que, ya lo sabemos, encuentran, como es natural, los principiantes. Al nivel de la conceptualización decimos más que los libros de texto: en clase, la actividad del grupo y la intervención del profesor proporcionan una corrección colectiva permanente. Pero los padres, aislados, se exponen a inmovilizarse en los malentendidos iniciales.

Por ello, encontraréis aquí una cantidad de reflexiones, notas, disgresiones... Todo esto no es, en modo alguno, materia de enseñanza pero conociéndolo comprenderéis mejor los conceptos básicos, y, al propio tiempo, si os interesa, podréis iniciar unos cursos especiales sin correr el riesgo de perder el tiempo.

3

De la pluma de algunos matemáticos leeréis a veces:

Espantados, perdidos en el patio de la Sorbona, en mayo de 1968 ¿quién sabe lo que os imaginaréis? Y llamaréis en vuestro socorro a los guardianes de la tradición y del orden.
¿Qué denuncian estas imprecaciones? La revancha dogmática, el inmovilismo estéril, la institucionalización de la ciencia.
Euclides, Aristóteles e incluso Galileo, Hipócrates y tantos otros fueron profetas revolucionarios en su época.
Pero, con la experiencia de los siglos, la humanidad ha enriquecido a Euclides, Aristóteles y Galileo. Resulta de ello la oposición tradicional entre los que veneran el antiguo saber como una palabra revelada y los que actualizan la ciencia siempre en movimiento porque es viviente.
Molière, no ridiculizaba ni a Galileo ni a Hipócrates, sino a todos los Purgon y Diafoirus cuya única ciencia se reducía a la memorización de los tratados antiguos.
Hay que rendir un homenaje merecido al pasado aunque sin caer en el mito de la Edad de Oro, ilusión de viejos que lloran su propia juventud...
Es fácil permanecer joven. Basta con no inmovilizarse en el tiempo.

¡Abajo el hombre del Neanderthal!
(que posiblemente inventó el fuego).

1

CONJUNTO Y ELEMENTOS

El niño acaba de nacer: lo presentamos a su madre. Con bruscas protestas este paquete tan cerrado se abre, se desenvuelve, mueve la cabeza, abre la boca, grita. Se acaba de hacer la primera separación; el niño ya no es parte de su madre. El conjunto de su «yo» empieza a existir.

1. Los significados en la lengua usual y en la lengua matemática

1.1

Todo el mundo utiliza la palabra «conjunto» y sus numerosas variaciones: colección, clase, grupo, banda, tropa, etc.
Cada uno entiende por estas palabras unos significados más o menos conocidos según el grupo social con el que nos comunicamos.

1.2

Por ejemplo: «colección» se refiere a una propiedad común a los elementos que la componen: una colección de sellos, de cuadros, de mariposas; en general, todos estos elementos están diferenciados por ciertas cualidades; por ejemplo, una colección de bolas de billar no será lo mismo que un saco de bolas.
«Banda», se aplica generalmente a seres vivos y semejantes que representan un carácter desordenado, salvaje, amenazador: una banda de forajidos, de ladrones...
«Enjambre», en cambio, se aplica a insectos muy característicos: un enjambre de abejas, de avispas (pero no de termitas).

1.3

Creemos conocer el sentido de las palabras y nos cuesta mucho admitir que nos impongan un significado distinto al construido por nosotros, al vivirlo y hablarlo en nuestro círculo cultural y social. Éste es precisamente lo que el matemático va a hacer. El significado de las palabras que utiliza, y particularmente la palabra «conjunto» no corresponde generalmente a la que tenemos guardada en la caja negra de nuestra cabeza.

1.4

Como que los niños reconocen la autoridad del profesor, aceptan con bastante rapidez la acepción propuesta: y esto muy fácilmente ya que conviven en grupo y utilizan entre ellos el significado adoptado.
Pero los padres no aceptan casi nunca la lección, sobre todo viniendo de sus propios hijos. Para ellos, un «conjunto» es lo que cada uno de ellos tiene en su cabeza como significado de esta palabra. Por eso se oye a veces el siguiente diálogo:

Padre (o madre): ¡Una palabra es un conjunto de letras!
Hijo (o hija) : No del todo, pues las letras de una palabra están en cierto orden.

Padre: ¡Tú me vas a enseñar lo que es una palabra!
¡Me vas a decir cómo se llama tu padre!

1.5

Nos es necesaria una gran humildad para admitir la acepción del matemático puesto que debe permitirnos, mientras sea posible, asociar un concepto común para una misma palabra.
Ciertamente, le queda al matemático el recurso de evitar las palabras usuales y emplear palabras escogidas con cuidado:

un *snark* (para un conjunto);
un *shadock* (para un elemento).

O palabras nuevas especialmente construidas:

un «pluricol» (para un conjunto);
un «partimón» (para un elemento).

En este caso, se le acusaría de desviacionismo lingüístico y su «jerga» sería condenada por la Real Academia Española. Es pues de la lengua viva, en la que como todo el mundo, el matemático elige sus palabras. La dificultad queda pues en ponerse de acuerdo sobre los significados.

1.6

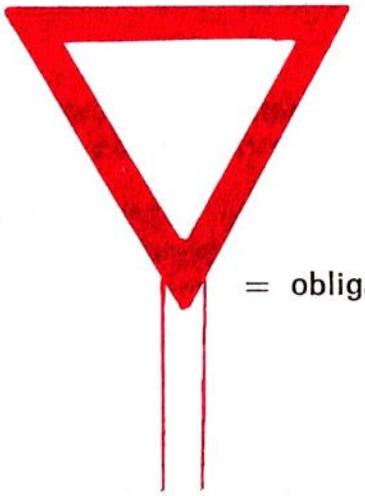
Un mismo objeto puede ser llamado de diversas maneras. Escribiremos el signo de igualdad [=] entre los diferentes nombres de un mismo objeto.

a = b	si y sólo si a y b representan el mismo objeto.

Ejemplos:

Napoleón I = El Ogro de Córcega

2 + 3 = 5



= obligación de ceder el paso.

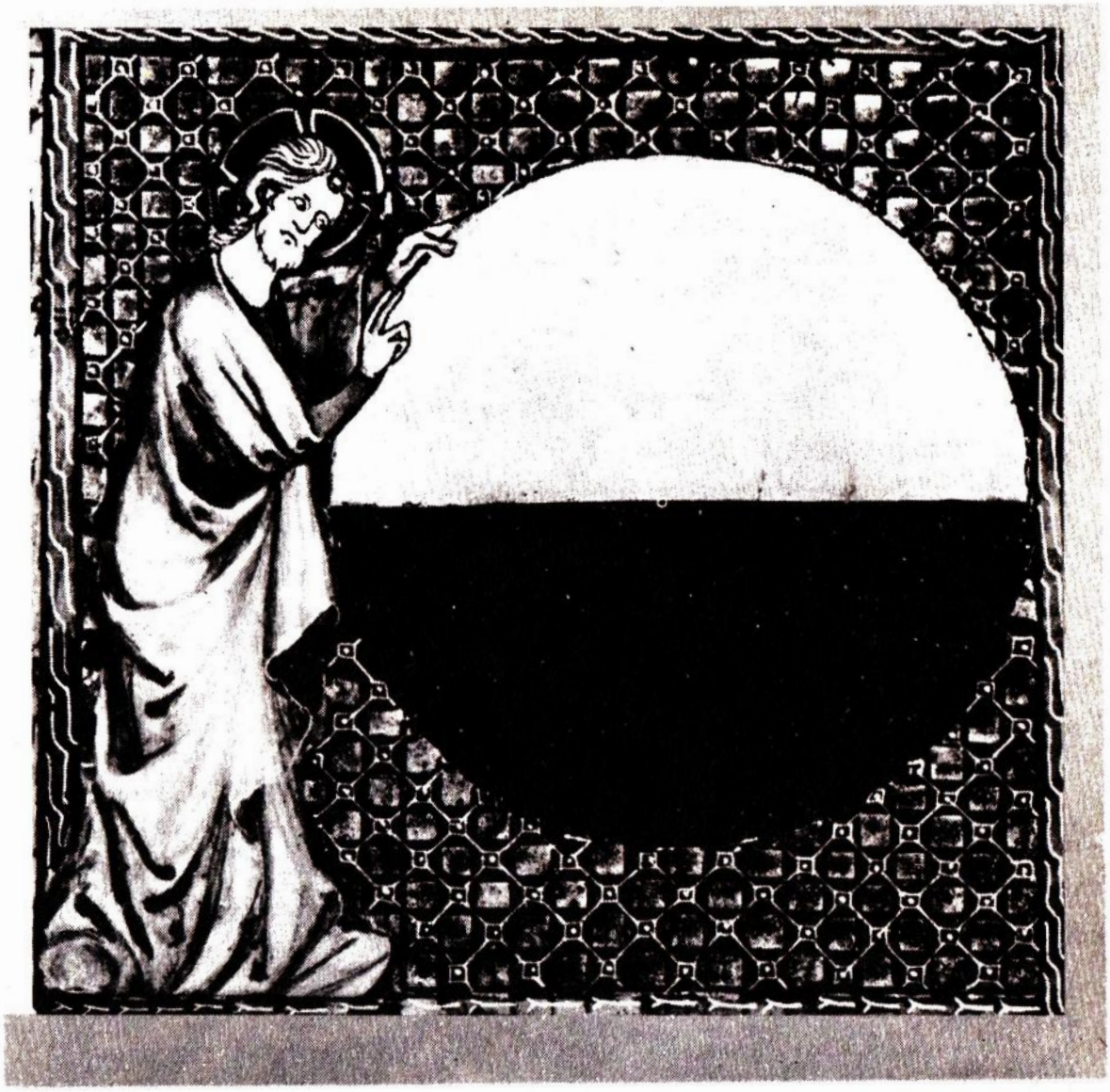
etc.

2. Una oposición: conjunto/elemento

2.1

No se concibe lo que es un conjunto si no imaginamos que está formado por objetos: son sus «elementos».
De la misma manera no imaginamos que un objeto sea un elemento, si no forma parte de un conjunto.
Las nociones de elemento y de conjunto no se conciben la una sin la otra. Se dice que están en oposición lingüística:

CONJUNTO/ELEMENTO



Un concepto sólo se construye por «oposición». ¡No hay domingo sin lúnes, alto sin bajo, jóvenes sin viejos!
Pero también ¡no hay día sin noche, ni noche sin día!
La creación empieza por la separación de la luz y las tinieblas cuya oposición nos da la primera estructura inteligente según el mito original.

2.2

Un conjunto está formado por elementos, los elementos forman un conjunto.

2.3

Ejemplos:

El conjunto de las diez primeras letras del alfabeto español lo componen los elementos a, b, c, d, e, f, g, h, i, j.
El conjunto de los cuatro mosqueteros de la novela de Alejandro Dumas está compuesto por los elementos D'Artagnan, Athos, Porthos, Aramis.
El conjunto de los días de la semana lo componen los elementos jueves, lunes, domingo, viernes, sábado, martes y miércoles.

3. La Pertenencia

3.1

Veamos dos acepciones de vocabulario y un primer signo de lenguaje matemático:

Se puede decir: **El elemento pertenece al conjunto;**
o también **El conjunto comprende al elemento.**

Para abreviar la escritura,
se sustituye la palabra «pertenece» por el signo $\in$;
y la palabra «comprende» por el signo $\ni$.

3.2

Ejemplos:

Jueves $\in$ al conjunto de los días de la semana;
que se lee:
«El jueves pertenece al conjunto de los días de la semana»;
o también:
«El conjunto de los días de la semana comprende el jueves».

3.3

Todavía aquí, hay que emplear las palabras con las significaciones convenidas, incluso si el lenguaje corriente las emplea en otro sentido. Así, cuando el General De Gaulle decía a los franceses de Argelia: «Os he **comprendido**», ¡tendría gracia que estuviera pensando en el lenguaje conjuntista!
Y, para los iniciados, el siguiente diálogo en la pista de un circo:

1914-18: cartel de reclutamiento.
You (Tú) ∉ al conjunto de los futuros antiguos combatientes.

Loyal: Entonces, Dudule, tu sombrero pertenece al conjunto de todos los sombreros.
Dudule: Pues no, Loyal. ¡Mi sombrero me pertenece a mí!
Loyal: No me entiendes Dudule. Quiero decir que...
Dudule: Te comprendo perfectamente, Loyal. Te comprendo en el conjunto de los ladrones (quitándole el sombrero)... ¡Devuélveme mi sombrero!

3.4

Con facilidad cualquier «padre» podrá ahora leer los signos $\notin$ $\not\ni$ e interpretarlos de izquierda a derecha y de derecha a izquierda:

La torre Eiffel $\notin$ al conjunto de los días de la semana.

El conjunto de presidentes de EE. UU. $\not\ni$ al General De Gaulle.

Para evitar dudas confirmaremos que:
$\notin$ se lee «no pertenece»;
$\not\ni$ se lee «no comprende».

4. Escritura

4.1

¿Cómo escribimos determinados conjuntos? Por ejemplo, ¿cómo publica un periodista la alineación del equipo español para el próximo partido internacional de fútbol? Seguramente, citando los elementos (en este caso los jugadores) que forman el conjunto.
Así, el conjunto de los emperadores de Francia está compuesto por Napoleón I, Napoleón III y Carlomagno.
Pero lo escribiremos de una manera convenida:

El conjunto de los emperadores de Francia = } Napoleón I, Napoleón III y Carlomagno {

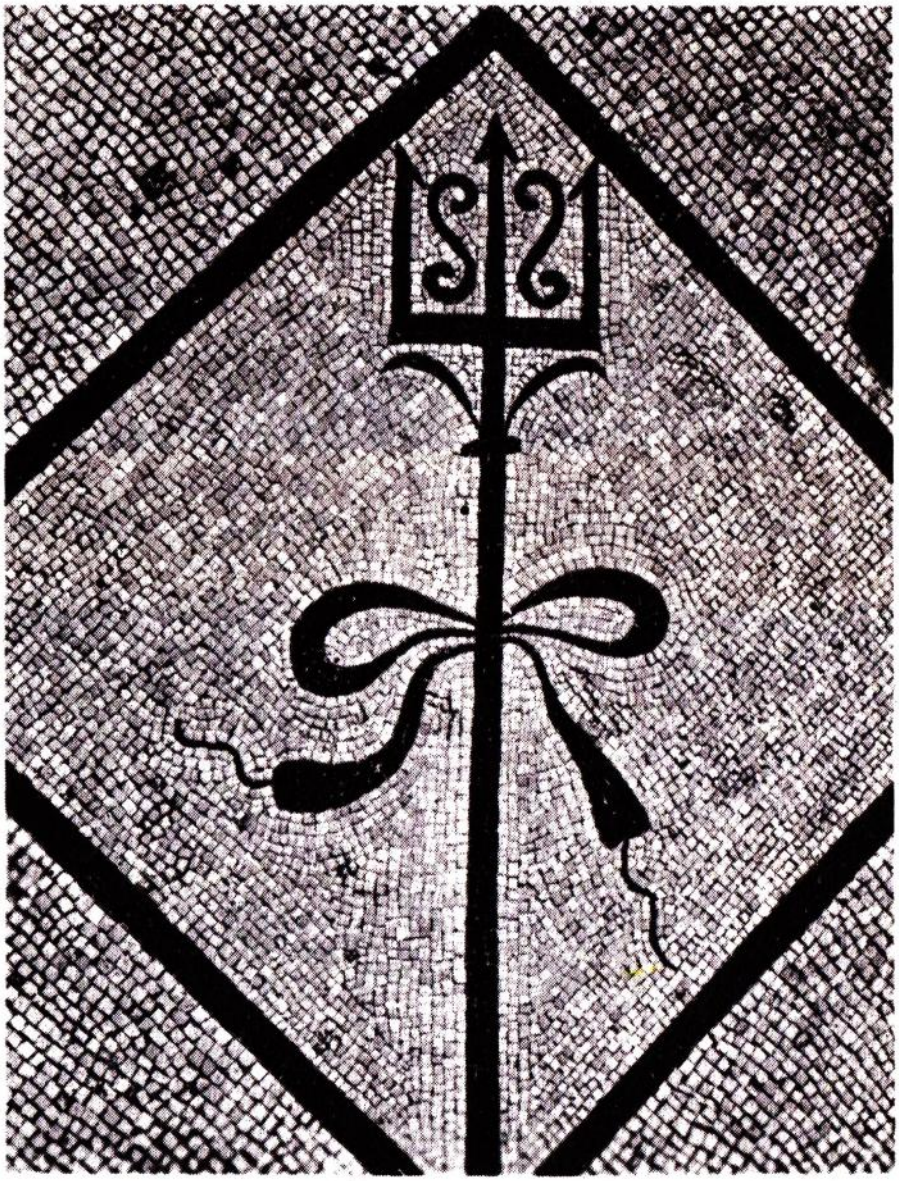
Esta notación **analítica** es más que evidente: las dos llaves encuadran la enumeración de los elementos; y se lee: «el conjunto que comprende a Napoleón I, a Napoleón III y a Carlomagno».

4.2

Ahora leed y traducid en una frase:
$7 \notin \{3, 1, 7, 4\}$
El General De Gaulle $\notin$ {Napoleón III, Carlomagno y Napoleón I}
$\{i, o, a, e, u\} \not\ni b$
{lunes, Napoleón I, 7, i} $\ni$ I [1]

---

(1) El conjunto que acabáis de leer os habrá causado extrañeza. Lo volveremos a ver (1 10-1)



Marca ideográfica de un armador de Delos. Ha sido encontrada en su casa, en sus barcos naufragados y en las ánforas rescatadas por la exploración submarina.

«Un ojo + dos serpientes = mal de ojo.»
Hasta un analfabeto comprenderá este ideograma cartaginés estructurado por la asociación de dos ideas.

¿Quién podría ignorar que Philonicus y Demetrius eran herreros?

4.3

También podremos representar un conjunto por una letra, o un signo cualquiera. Esta notación **sintética** abrevia la escritura.

Ejemplos:

Si A = al conjunto de los emperadores de Francia

Napoleón I $\in$ A

Carlos V $\notin$ A

Si $\mathbb{N}$ = conjunto de los números enteros

$3 \in \mathbb{N}$

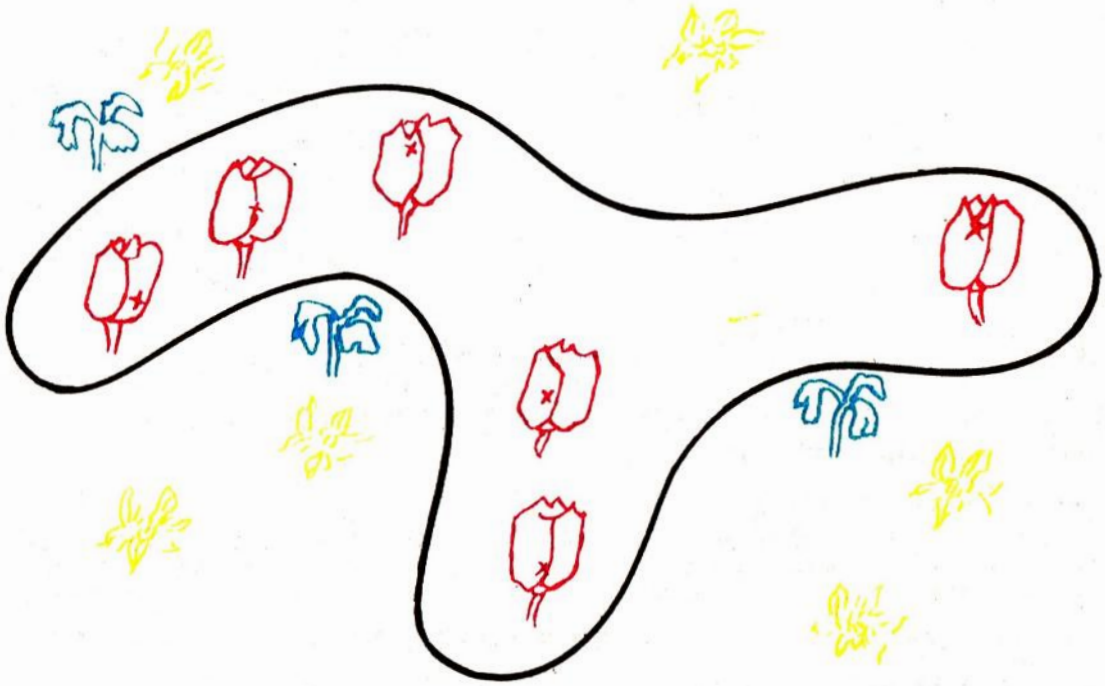
$\frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$

la luna $\notin \mathbb{N}$

5. Ideogramas de Euler-Venn

5 1

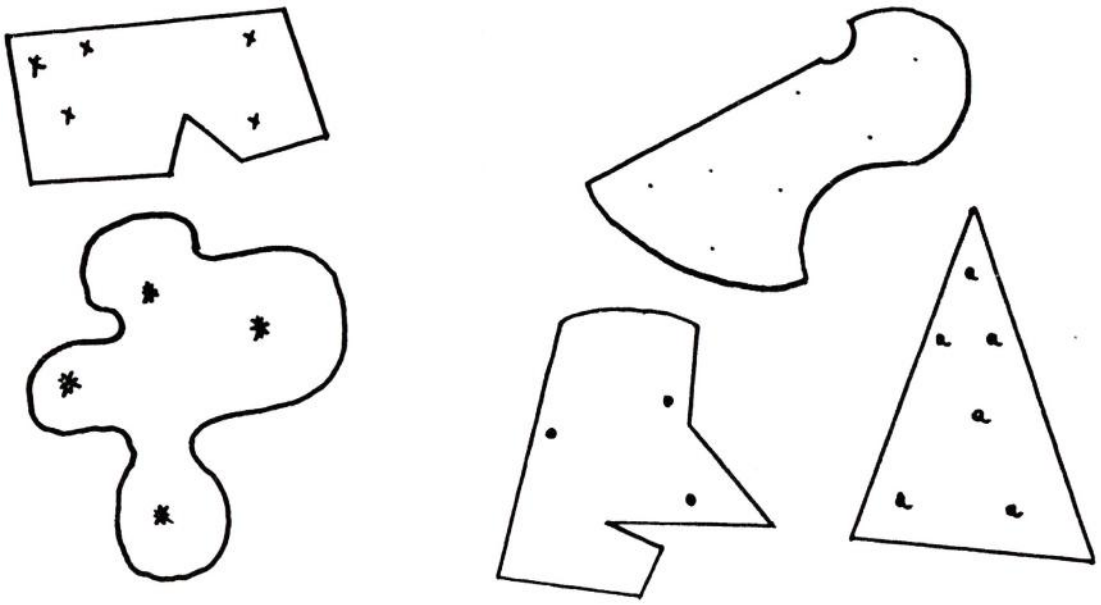
Observemos este parterre con flores:



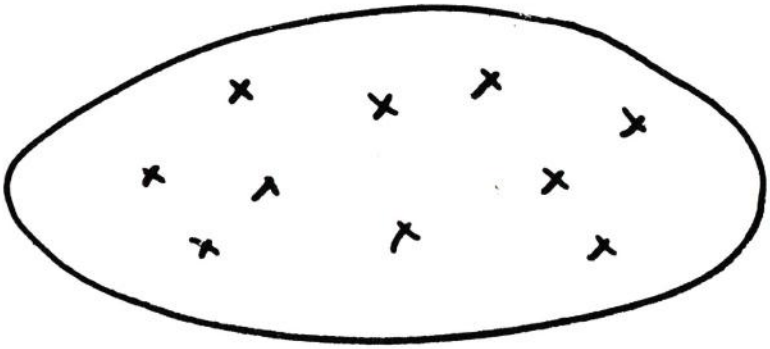
Podemos aislar de este parterre el conjunto de tulipanes rodeándolos de un bramante, una cuerda o una línea. Si la cuerda está bien colocada, cualquier flor que esté en el interior será un «tulipán»; cualquier flor que esté en el exterior no será un «tulipán».

5.2

Una cuerda cerrada nos proporciona una excelente imagen de los límites de un conjunto. Los elementos los representaremos por «puntos», «pequeñas cruces» o por cualquier otro signo adecuado.



Para unificar la escritura, se dibuja a menudo la «cuerda» del conjunto como un «óvalo» (1).



Este esquema nos evita una escritura figurativa y convencional.
Esto es un **ideograma** (2).

---

(1) Algunos lo llaman también una «patata» o un «patatoide»; a la teoría de los conjuntos = patatología; al matemático = patatólogo; y de la misma manera se habla de patatofilia, de patatofobia, etc.

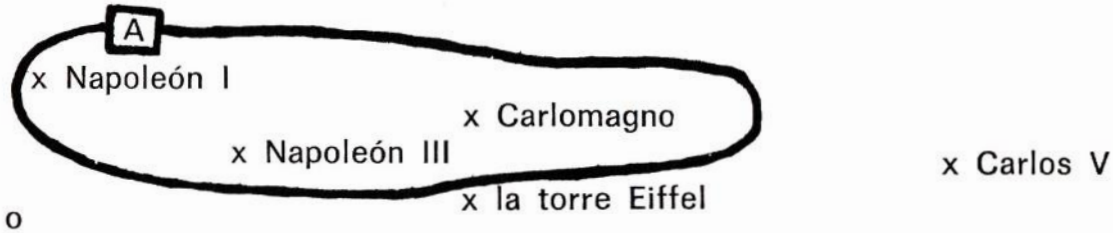
(2) Un ideograma es un signo figurativo que expresa convencionalmente una idea.
Ejemplos:
calavera = veneno
cigarrillo tachado = prohibido fumar
caduceo = emblema del comercio
Las señales de tráfico
ciertos gestos: auto-stop
bendición
deseo de hablar
juramento
gestos del agente de tráfico, etc.

Este ideograma procede de dos matemáticos: **Euler** y **Venn** (1).

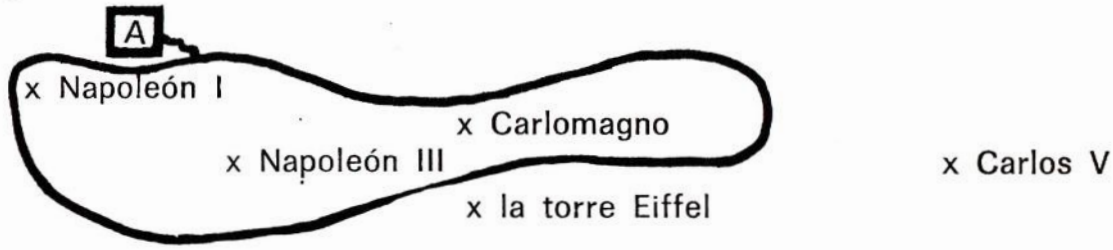
5.3

5.4

La cuerda o línea no es el conjunto; sirve de frontera para separar los elementos de los no elementos. La línea (grafismo) juega un papel análogo al del nombre (signo fonético). El «nombre» no es la «cosa nombrada».
Para recordar que la letra representa únicamente el «nombre» del conjunto, algunos pedagogos la recuadran, la escriben sobre una etiqueta o en un cartucho. De ahí los grafismos:



o



6. Orden de los elementos

6.1

Cuando escribimos o hablamos, tenemos que poner las palabras o los sonidos desde el principio hasta el fin. Esta linealidad del lenguaje nos obliga a escribir o nombrar los elementos de un conjunto en un cierto orden. Este orden no significa nada.

El ideograma expresa un concepto sin utilizar el soporte fonético. Así, en la antigüedad, había la escritura egipcia, la sumeriana y la china.

(1) Euler (Basilea 1707 - San Petersburgo 1783): utilizó círculos como ideogramas para representar los razonamientos áridos de la lógica aristotélica.
Venn (1834-1923) fue profesor de Cambridge.
De aquí el nombre del «óvalo de Venn» o de «Euler-Venn».

Dos escrituras de conjunto que sólo difieren por el orden en que están nombrados sus elementos, designan el mismo conjunto.

Por ejemplo:

$$\}\, N_1,\ N_3,\ Ca\, \{ \;=\; \}\, N_1,\ Ca,\ N_3\, \{ \;=\; \}\, N_3,\ Ca,\ N_1\, \{$$

$$=\; \}\, N_3,\ N_1,\ Ca\, \{ \;=\; \}\, Ca,\ N_1,\ N_3\, \{ \;=\; \}\, Ca,\ N_3,\ N_1\, \{$$

También podíamos haberlo escrito de esta manera: $\left\{ \begin{array}{ccc} & N_3 & \\ Ca & & N_1 \end{array} \right\}$

6.2

Según esto, una «palabra» no es un «conjunto de letras», sino un «conjunto **ordenado** de letras»; una frase es un conjunto ordenado de palabras (unidas sintácticamente de una manera correcta).
Pero se puede formar, en lugar de una frase, «el conjunto de las palabras de esta frase»:
{Adelante, hijos, de, la, patria} = {patria, adelante, de, la, hijos}

6.3

Si se considerara un reloj como un simple conjunto de piñones, ejes, tornillos, resortes y ruedas, parecería el desmontaje del despertador del filme «Charlot relojero» y sería muy difícil conseguir los servicios (normales) de un reloj.

6.4

Una melodía no es solamente un conjunto de notas. Pero, sin embargo, un acorde sí que es un conjunto de notas. Para pasar del acorde a la melodía es preciso establecer un orden.

7. Repetición de un signo

7.1

En la formación de un conjunto, un elemento particular sólo aparece una sola vez, sea cual fuere la manera de nombrarlo.

En consecuencia, si varios signos representan un mismo elemento, estos signos pueden ser sustituidos por uno solo de ellos.

Ejemplos:

{N I, N III, el ogro de Córcega, Carlomagno, el padre del hijo de N I, el emperador de Francia vencido en Waterloo, el hijo de Carlos Bonaparte y de Leticia Ramolino, N I, N I, N I} = {N I, N III, Ca}

Angel de la octava esfera mostrando el conjunto de las estrellas de la patata celeste.

$\{3, 4, 5, 2 \times 2, 7 - 3, 1, 4, 2^2\} = \{3, 4, 5, 1\}$
Si se trata de un conjunto de «signos» se observa que:
«7 — 3» es otro signo que «2 × 2».
«Napoleón I» es una manera de escribir el «Ogro de Córcega».
Pero el conjunto está formado, no por «significandos» (aquí diferentes), sino por «significados» (aquí comunes) (1).

7.2

Consideremos el conjunto
E = {Molière autor, Shakespeare autor, Vinci ingeniero, Molière comediógrafo, Vinci filósofo, Shakespeare comediógrafo, Vinci pintor}.
Entonces, si:

Molière autor	= Molière comediógrafo
Shakespeare autor	= Shakespeare comediógrafo
Vinci ingeniero	= Vinci filósofo = Vinci pintor

el conjunto E comprende tres elementos.
Pero si:

Molière autor	≠ Molière comediógrafo
Shakespeare autor	≠ Shakespeare comediógrafo
Vinci ingeniero	≠ Vinci filósofo
Vinci ingeniero	≠ Vinci pintor
Vinci filósofo	≠ Vinci pintor
Vinci filósofo	≠ Vinci ingeniero
Vinci pintor	≠ Vinci filósofo

el conjunto E contiene siete elementos.

8. Conjunto de significandos y conjunto de significados

8.1

La manera con que llamamos a los elementos de un conjunto puede dar lugar a confusión.

---

(1) Un significando (Sa) y un significado (Se) son dos aspectos de un signo. Así:

Significandos	*Significados*
Un triángulo blanco bordeado de rojo y apoyado sobre un vértice	Ceda el paso
Una etiqueta con una calavera	Veneno
La vela negra del barco de Iseo	Iseo no está en el barco
Un crespón en el brazo o en la solapa	Luto
Una sirena que suena cuando vamos en coche	Dejar el paso libre
La cifra 5	El número 5

Las palabras que utilizamos son, para los significandos, su forma escrita y fonética, y para los significados los conceptos que les asociamos.
En lugar de «significando» y «significado» diremos a veces «forma» y «contenido».

Así,
{Antonio, Octavio, Lépido}
puede representar al segundo triunvirato, es decir, los tres gobernantes de Roma en el año 43 a. JC. (como significados), pero también puede representar un conjunto de tres «nombres» (como significandos).
{2, 3, 9, 7, 4}
puede representar un conjunto de cinco «cifras» o de cinco «números».

8.2

Comparemos estos dos enunciados:

Pedro es un apóstol.	Pedro es un nombre propio.
«Pedro» es el signo del objeto-apóstol.	«Pedro» es el signo de un significando, es decir, expresa un objeto-nombre propio.

Ocurre lo mismo en:
Beaumarchais es el autor de «Las bodas de Fígaro».
Beaumarchais es trisílabo.
La lengua escrita o hablada no permite cómodamente distinguir entre la palabra que expresa el objeto y la que representa el signo. La misma confusión se produce en aritmética entre los números y las cifras
En:

«Los siete pecados capitales»	«siete» expresa una cantidad.
«El autobús 7»	«7» expresa una cifra.
«El agente 007»	«007» expresa un índice nominal con la ayuda de tres cifras.

8.3

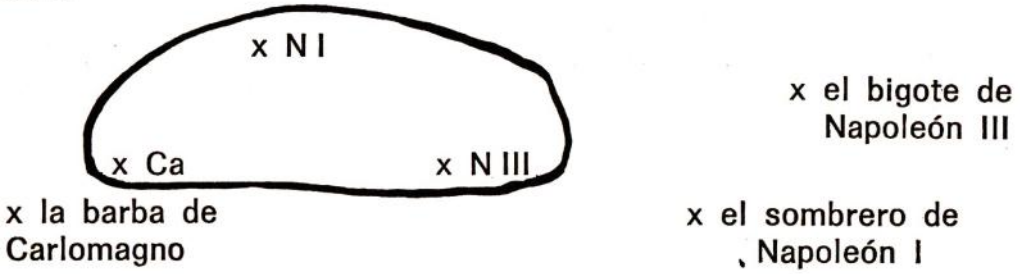
Cuando utilizamos signos en vez de «palabras», «nombres», «cifras» ... lo indicamos muchas veces con una escritura convencional.
Así,
{Antonio, Octavio, Lépido} gobernaron en Roma en el año 43 a. JC.
{«Antonio», «Octavio», «Lépido»} son tres nombres sacados al azar.

9. El elemento y los objetos que se asocian a él

9.1

En el conjunto de los emperadores de Francia:

El sombrero de Napoleón I está dibujado **en** el conjunto (donde está Napoleón I está su sombrero).
Pero el sombrero de Napoleón I, ¿pertenece al conjunto?
Para responder a esta cuestión, preguntemos:
—¿Es emperador de Francia el sombrero de Napoleón I?
—¡No!
Por lo tanto, el sombrero de Napoleón I no pertenece al conjunto.
El sombrero de Napoleón I $\notin$ {N I, N III, Ca}
Es decir:



Por esto es mejor «abstraer» el objeto y señalarlo por un punto, una cruz una letra o un nombre.

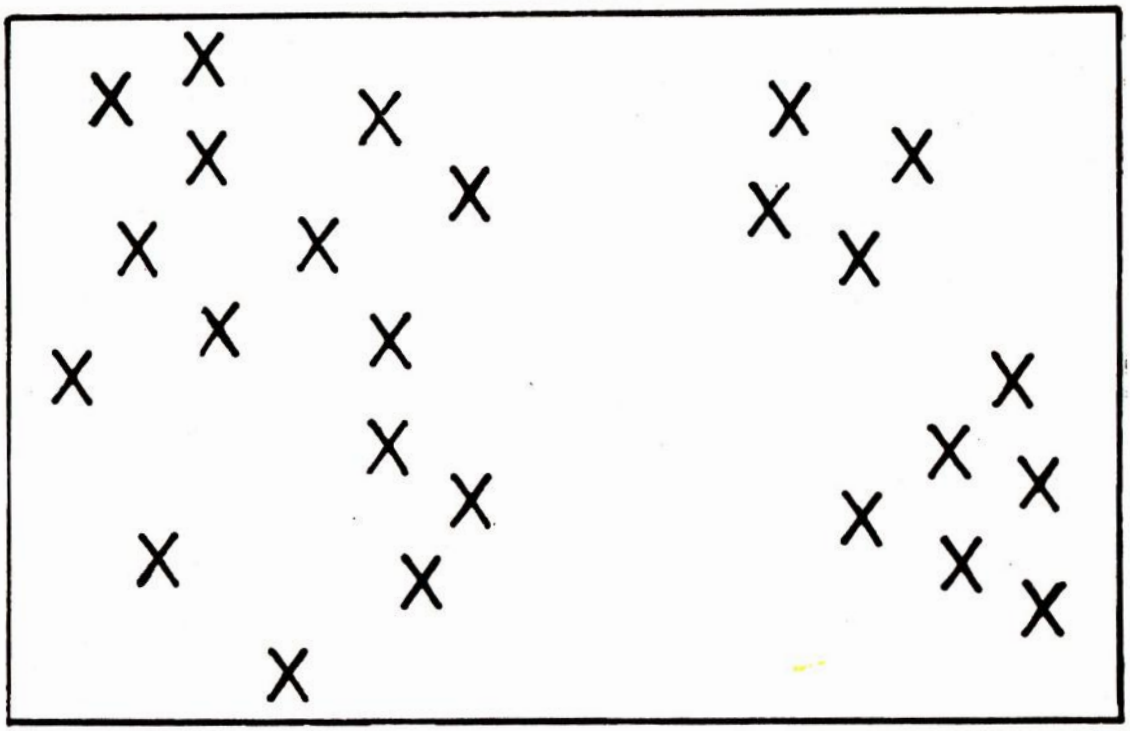
9.2

Los conjuntos concretos que construimos están hechos frecuentemente por contenidos; contenidos de cestas, maletas, cajones, bolsas, salas, cuarteles, etc...

Si mi cortaplumas está en el cajón de mi mesa, cada hoja de mi cortaplumas está también en el cajón; pero una hoja no es un cortaplumas. Si un alumno está en el aula, su oreja derecha está también en el aula; pero la oreja derecha no es un alumno.

9.3

No hay que confundir la relación espacial «estar en» con la relación conceptual «pertenecer a» (la relación espacial se reduce además a una particularización de la relación conceptual).
Si tomamos como ejemplo el conjunto de los alumnos de un colegio, nos lo podemos imaginar cómodamente situando a todos los alumnos en el patio de recreo.



El contorno del patio, que es un espacio cerrado, nos proporciona un ideograma de Venn muy adecuado.
Pero cuando los alumnos estén en sus casas, con sus respectivas familias, el conjunto de los alumnos del colegio seguirá existiendo y no habrá variado a pesar de no encontrarse en un mismo espacio cerrado.
Entonces resulta que el ideograma de Venn, a pesar de sus ventajas, también tiene sus inconvenientes. La pertenencia es una relación **conceptual** y no espacial. Como nos la figuramos espacialmente, resulta que nosotros mismos podemos confundirnos.

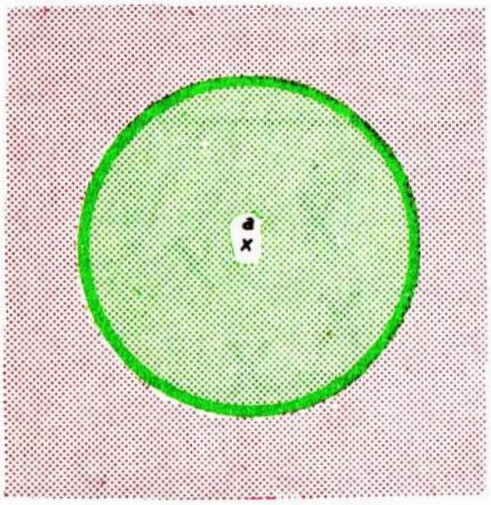
9.4

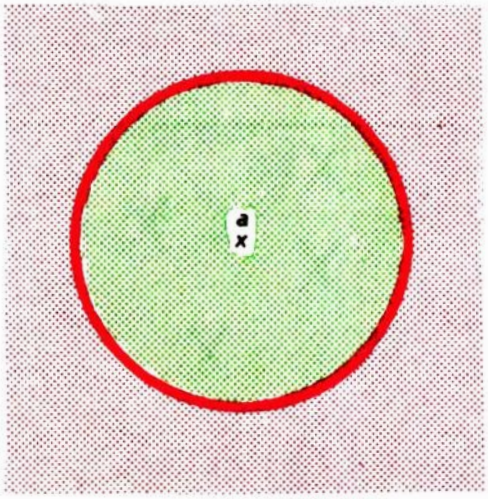
Nos encontramos con dificultades cuando representamos espacialmen-

te, por medio de un ideograma de Venn, un conjunto que precisamente es espacial.
Consideremos, por ejemplo, el conjunto de puntos de un disco cerrado A y los de un disco abierto B, de centro a y de un radio de 3 cm.

El disco cerrado es el conjunto de los puntos p del plano, tales que la distancia $ap \leqslant 3$ cm (suponiendo que a se encuentra en un punto del plano).

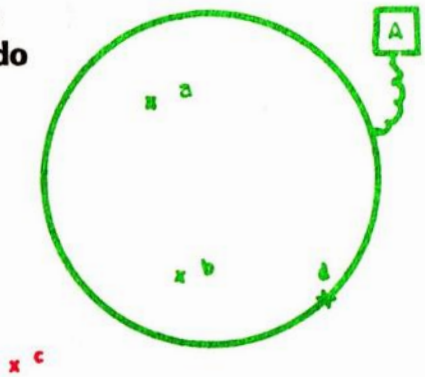
El disco abierto es el conjunto de los puntos p del plano, tales que la distancia $ap < 3$ cm (suponiendo que a se encuentra en un punto del plano).





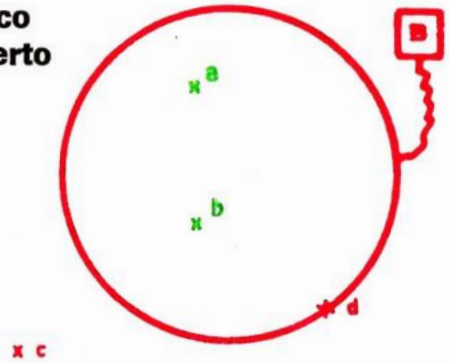
Si representamos el disco por una circunferencia, como ideograma de Venn, tendremos dificultades al representar determinados elementos.

Disco cerrado



El punto d, situado en la circunferencia, **pertenece** al conjunto.

Disco abierto

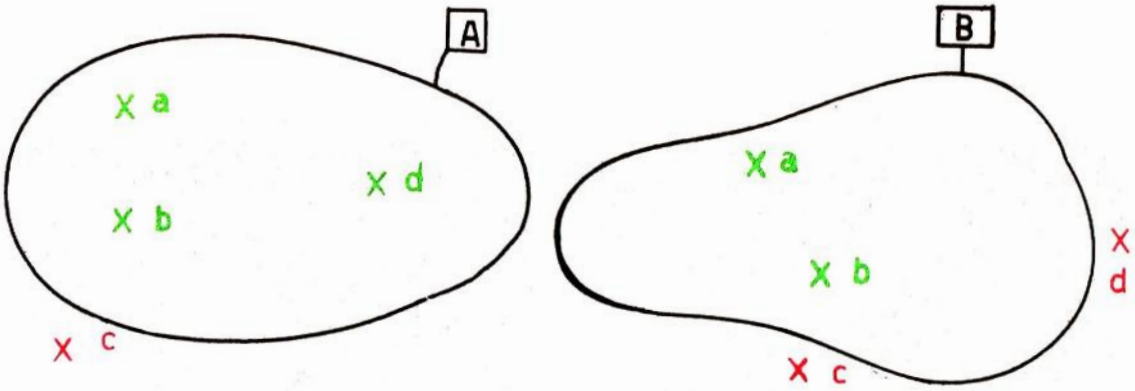


El punto d, situado en la circunferencia, **no pertenece** al conjunto.

La línea o cuerda debería separar los elementos de los no-elementos.

Ningún elemento pertenece nunca a la «cuerda».

La representación de los discos por medio de «patatas» tiene en este caso sus ventajas.



9.5

Con esto, llegamos a esta conclusión que resulta un tanto sorprendente:
Un lugar geométrico considerado como un conjunto de puntos, no proporciona necesariamente una representación ideográfica completamente satisfactoria.

10. De la libertad de asociación

10.1

Os habrá extrañado encontraros con el conjunto
{lunes, Napoleón I, 7, i}
y os habréis dicho: «esto no es un conjunto; sus elementos no tienen nada en común».
¡Pues sí!, ya que soy yo quien os habla, he decidido formar un conjunto (estoy en mi derecho) y porque quiero hacerlo, tienen en común la propiedad de haber sido elegidos por mí. No os digo que tenga ninguna importancia en cuanto a sus propiedades, pero tampoco os he dicho que las vaya a tener. ¡Esto es otro asunto! Lo único que defiendo, por el momento, es mi derecho de formarlo.
También vosotros tenéis el derecho de formar otros, aunque sean ridículos, raros o extravagantes:
{la luna, Carlomagno, el sombrero de Napoleón I}
{1, 2, 3, la Gioconda}
En efecto, para no desconcertar a nadie, se califica a menudo a estos conjuntos de «extravagantes» o «raros». Pero el carácter extravagante de un conjunto desaparece en cuanto se empieza a utilizar frecuentemente. De hecho, los conjuntos «extravagantes» sólo son conjuntos «poco usados».

10.2

Lo que existe en el universo son los objetos, no los conjuntos.
Soy yo, eres tú, somos cada uno de nosotros los que tomamos la

¿Qué es una naturaleza muerta sino un conjunto raro?

decisión de formar conjuntos. Nuestro espíritu reacciona contra el universo haciendo recortes.

Los objetos existen en el universo.
Los conjuntos sólo existen en nosotros mismos.

10.3

En realidad, en la «Declaración de los derechos del hombre y del ciudadano» tendría que añadirse el siguiente artículo:
«Todo individuo podrá libremente formar en su mente, y expresar por medio del lenguaje, los conjuntos que tenga a bien construir.»
Pero eso es tan lógico que no es necesario añadirlo en la citada Declaración.

10.4

A veces, este derecho natural choca con espíritus muy serios que, lamentándose, dicen: «dudamos mucho que semejantes mezcolanzas contribuyan a poner orden en las jóvenes cabezas y que aumenten el prestigio de la enseñanza» (¡sic!).
Estos espíritus, siempre tristes, olvidan que los conjuntos «extravagantes» no tienen por qué extrañarnos, puesto que constituyen un excelente método de enseñanza.
El derecho de formar conjuntos es parecido al de formar frases; cualquiera puede hacerlo, pero, entiéndase bien, han de servir para algo. La poesía y la historia nos ofrecen muy buenos ejemplos de conjuntos extravagantes.

10.5

Por ejemplo: «Inventario» en la obra «Palabras» de Jacques Prévert (nos limitaremos a la primera estrofa):

«una piedra,
«dos casas,
«tres ruinas,
«cuatro sepultureros,
«un jardín,
«flores,
«...
«un mapache.»

O bien este relato de Herodoto (IV, 131, 132) en donde los escitas envían a Darío, rey de los persas, un mensajero que le presenta un conjunto que contiene:

«un pájaro, una rata, una rana y cinco flechas»

lo que significa:

> «a no ser que vueles como un pájaro, que te escondas en un agujero como una rata o que te escapes nadando como una rana, serás muerto por nuestras flechas».

11. Formación por enumeración

11.1

Es el hombre, ese creador, el inventor de los conjuntos.
¿Cómo se las arregla para irlos elaborando poco a poco?
Cuando el niño acumula sus juguetes en la cuna o en el parque, reúne los objetos considerándolos como elementos. Primero aprende a **enseñarlos**, después a **nombrarlos**, y finalmente a **escribir** su nombre.

Un proceso de formación es una **definición.**

11.2

Entonces, se puede formar un conjunto enseñando, nombrando o imaginando sus elementos.
Este procedimiento **analítico** se llama formación por **inventario** (o también **por extensión**) (1).
Un equipo de fútbol, una clase con alumnos, los libros de una biblioteca, los cuadros de un museo, los ayuntamientos de un país, etc., se forman por inventario.
Por inventario hemos formado los conjuntos:
{N I, N III, Ca}
{Antonio, Octavio, Lépido}
{1, 2, 3, la Gioconda}
Y para nombrar a los elementos, empleamos a menudo nombres que solamente valen para uno de ellos, es decir, «nombres propios».

11.3

La formación por inventario no permite formar conjuntos infinitos, ni tampoco conjuntos que contengan un elevado número de elementos.
La Biblia dice:

> «¿Podrías contar las estrellas del cielo?»

---

(1) Desde hace mucho tiempo, la lógica llama a esta construcción una definición «por extensión». Este término no es adecuado pues da lugar a una confusión con la noción de «extensión» de un conjunto. Procuraremos evitarla aunque es corriente encontrarla en algunos libros. Recordemos pues que «formar por extensión» es «formar por inventario».

Esto corresponde más o menos a:

«¿Podrías formar por inventario
el conjunto de las estrellas del cielo,
el conjunto de los hombres que actualmente habitan la tierra,
el conjunto de los puntos de una recta,
el conjunto de los números enteros,
y también
el conjunto de los granos de arena que hay en este arenero?»

12. Definición por caracterización

12.1

En los primeros años de su vida, para el niño, todos los juguetes son distintos, aunque formen un conjunto. Cada objeto tiene su nombre propio. No tienen todavía suficientemente formado su lenguaje y simplifican erróneamente las definiciones.
A partir de cierto momento de conceptuación, el niño aceptará dar el mismo nombre a objetos distintos.
Este nombre será el de la propiedad común (un nombre común); dirá, por ejemplo: «mis juguetes», dando el nombre de «juguete» a objetos tan dispares como una pelota, un oso de peluche, una miniatura de automóvil o un caballo de madera.
Entonces se puede formar un conjunto dando una propiedad común a todos los elementos. Este procedimiento **sintético** se llama formación por **caracterización** (o por **comprensión**) (1).

Ejemplos:
el conjunto de los emperadores de Francia;
el conjunto de los números pares;
el conjunto de los planetas que giran alrededor del sol;
el conjunto de los solteros y mayores que vivían el día 1 de enero de 1970;
el conjunto de los puntos de una recta;
el conjunto de las circunferencias de un plano;
etc....
Escribiremos:
los emperadores de Francia = { x | x es un emperador de Francia}
en donde | se lee «tal que»
y el artículo «los» indica que se trata de un conjunto considerado en su totalidad.

---

(1) La lógica llama a esta formación una definición por «comprensión». Este término no presenta dificultades, pero como siempre se utiliza al mismo tiempo que la palabra «extensión» preferimos sustituirla por el término «caracterización» nacido de la lingüística.

12.2

En general, escribiremos:

$E = \{x \mid P(x)\}$
E es el conjunto de las «x» que cumplen el enunciado o propiedad representada por P(x).

Por ejemplo, si P(x) = «x es un número par»,

Resulta que

son falsos:	son verdaderos:
P(5)	P(4)
P(1/8)	P(2)
P (la torre Eiffel)	P(7 003 574)

12.3

Una definición por caracterización permite nombrar los conjuntos que contienen un gran número de elementos y también los conjuntos infinitos; cosa que no permite una formación por inventario.
Se observa que el paso del inventario a la caracterización es una operación psicológica de abstracción. «Abstraer» es omitir, ignorar voluntariamente ciertas propiedades de los objetos y no considerarlos más que en relación con las propiedades restantes.
Una fotografía en blanco y negro hace abstracción del color, de la tercera dimensión, del movimiento, del olor, del calor, etc....
Un triángulo «geométrico» no es caliente ni frío, ni rojo ni verde, ni de hierro ni de madera. Pero puede ser rectángulo o no, isósceles o no, etc.... Es abstracto considerando ciertas propiedades; sin embargo, conserva otras.
La palabra es expresiva si tenemos en cuenta su etimología:

AB TRAHERE = quitar de.

Por abstracción, todos los juguetes distintos son considerados como equivalentes por su función de «juguete», todos los granos de arena, individualizados solamente por su localización precisa en el espacio (un grano de arena no es distinto a otro grano de arena), se encuentran unidos por una relación de equivalencia.
La abstracción asegura la conceptualización y da concisión al lenguaje.

12.4

Se ha discutido mucho si, en la adquisición del conocimiento, el inventario precede a la caracterización o si la sigue. Para algunos, el concepto general «justo» preexistiría en algún lugar de nuestra mente, o del universo, y, con la condición de haberlo inducido a un nivel de conciencia, dispondríamos de medios seguros para reconocer si los

actos que se realizan pertenecen o no al conjunto de los actos justos. La definición por caracterización precedería a cualquier inventario. Los que creen esto imaginan unos valores conceptuales confiados inicialmente al hombre, el cual no tendría más que vivirlos para descubrirlos. Estos valores, comunes a todos los hombres, serían entonces únicos.
Para los otros, cada hombre debe encontrar cierto número de actos que constituyen el inventario y que son calificados convencionalmente de «justos» o de «injustos». Después, el hombre es quien extiende el concepto a la totalidad de los actos que hace. Si el inventario es insuficiente, la definición del conjunto, es decir, el inventario, siempre puede ser puesta en duda. Para los que viven así, la experiencia precede a su racionalización; los valores son creados por el hombre en el medio en que vive, y son transmitidos por la sociedad. Estos valores dependen, pues, de las diversas sociedades, de los variados grupos sociales y también del momento histórico en que son definidos. Esta opción fundamental proporciona una primera base filosófica a cada uno de nosotros.
Podemos reconciliar estas dos actitudes opuestas admitiendo que si los valores son construidos por cada hombre en función de la sociedad y de su historia, las estructuras neurológicas son comunes a todos los hombres. Nuestras percepciones son semejantes, pero nuestra experiencia es diferente. Esto nos va a permitir movernos más cómodamente entre lo relativo y lo absoluto.

12.5

La definición por caracterización no asegura la «existencia» a los elementos del conjunto. Podría ocurrir que ningún elemento poseyese las propiedades exigidas.
Ejemplos: los triángulos cuadrados; los poliedros regulares de quince caras; los becerros de cinco patas que cantan la Tosca; las hormigas de dieciocho metros de largo que con un sombrero en la cabeza hablan francés y javanés; la gallina de los huevos de oro; la fuerza vital; el éter (en el sentido «espacio físico absoluto»), el flogístico, etc...
La utilización, en cualquier razonamiento, de una definición por caracterización debería completarse con una prueba de existencia. Esto, generalmente, se omite.

12.6

Aquí, contrariamente a una de las formas del pensamiento mágico que cree que es suficiente nombrar al ser para que exista. Así era el pensamiento escolástico que afirmaba que toda palabra correspondía a una idea y toda idea a un ser.
De aquí procede la burla de Rabelais: «Se pregunta si la Quimera, murmurando en la vida, ¿no podría comerse las segundas intenciones?

Es un asunto intensamente debatido durante doce o quince semanas en Concilio».

13. Conjuntos correctamente definidos

13.1

Un conjunto está correctamente construido o definido si entre las dos proposiciones:

«tal objeto es elemento del conjunto»

«este mismo objeto no es elemento del conjunto»

una es cierta y otra falsa.

Con otras palabras, **la definición de un conjunto divide a todos los objetos en elementos y no elementos de este conjunto.**

13.2

Veamos un ejemplo de definición incorrecta:

«E es el conjunto de todos los conjuntos.»

En efecto:

$E \notin E$ es cierto (un conjunto no pertenece a sí mismo)

y

$E \in E$ es cierto (pues E es el conjunto de todos los conjuntos).

13.3

Esta afirmación fue puesta en duda por Bertrand Russell, que la ilustró con una paradoja famosa que vamos a narrar recortándola ligeramente para simplificarla [1].

«Zacarías era bibliotecario. Pero la biblioteca que dirigía era muy original: era una biblioteca formada con obras que proporcionaban títulos de todos los libros que trataban de un cierto tema; resumiendo, ¡una biblioteca de catálogos de libros! Por ejemplo, la obra 2497 contenía la lista de todos los libros que trataban de la historia del Partenón; la obra 5942 los que hablaban de Cristóbal Colón, y así sucesivamente...

Entre estos catálogos algunos se citaban entre ellos. Así, el autor del catálogo 5942 creyó que su lista bibliográfica era una manera de ha-

---

(1) Bertrand Russell (1872-1970), lógico, filósofo británico, fundador (con Whitehead) de la lógica «moderna» y no aristotélica. Personaje maravillosamente anticonformista; sus escritos sarcásticos son obras maestras de humor panfletario. («Por qué no soy cristiano».) En edad ya muy avanzada, presidió manifestaciones contestarias y pasó (confortablemente porque era «lord» y premio Nobel) varias temporadas en la cárcel.

blar de Cristóbal Colón. Y a la lista de libros que trataban sobre el particular añadió el título de su propio catálogo.
Zacarías juzgaba estas obras (igual que a sus autores) como presuntuosas y vanidosas... En contraposición, apreciaba la modestia de las obras (igual que a sus autores) que, como la 2497, omitían de citarse a ellos mismos.
Un día tuvo que repartir sus libros entre dos lugares; el ala izquierda y el ala derecha de un castillo renacentista. Un bibliotecario es el único que puede decidir, por lo que se puso del lado de Dios-padre con vistas al juicio final. Zacarías decidió soberanamente colocar en el ala izquierda los catálogos vanidosos y a la derecha los catálogos modestos. Sucumbió en las zarpas del Demonio. Veamos como Satán le castigó por su orgullo.
Cuando Zacarías hubo colocado todos sus libros, comenzó como bibliotecario consciente, la redacción del catálogo de catálogos vanidosos (a la izquierda) y del catálogo de catálogos modestos (a la derecha).
Y cuando hubo concluido estas dos nuevas obras, se dio cuenta de que tenía dos catálogos más.
¿Serían modestos o vanidosos? Modestos, ¡seguro! Zacarías se creía virtuoso: no se citaba a sí mismo.
Pensó primero en el catálogo de los catálogos vanidosos. Era modesto. Lo colocaría en el ala derecha del castillo. Esto fue lo que hizo Zacarías.
El ala derecha contaba con un libro más. Zacarías abrió el otro catálogo, el catálogo de los catálogos modestos y, con su mejor letra, añadió el título del catálogo de los catálogos de los vanidosos.
Para culminar su obra, Zacarías no tenía más que colocar el último catálogo, el catálogo de los catálogos modestos, en una de las dos alas del castillo.
Puesto que el catálogo de los catálogos modestos era de por sí modesto, debía de estar en el ala derecha.
Pero entonces, el ala derecha tenía un libro de más.
Rápidamente, volvió a coger el catálogo de los catálogos modestos y se mencionó a sí mismo puesto que esta última obra debía figurar en el ala derecha.
Esto fue lo que le hizo darse cuenta de su pecado de vanidad; el catálogo de los catálogos modestos se había vuelto vanidoso. Suspirando, se fue a llevarlo al ala izquierda del castillo.
Una vez que hubo llegado se dio cuenta de que el ala derecha contenía un libro de menos. Volvió a tomar este último catálogo y suprimió la mención que se hacía de sí mismo. Así, el catálogo que era vanidoso se volvió modesto.
Era preciso llevarlo rápidamente al ala derecha del castillo, lo que hizo Zacarías corriendo.
Pero, una vez en el ala derecha...
Y por esto hay, en el bosque de Brocelandia, un bibliotecario loco que corre del ala izquierda al ala derecha y del ala derecha al ala izquierda,

y, entre las dos carreras, y, en un mismo libro, no cesa de escribir un título, de borrar aquel título, de volverlo a escribir, de volverlo a borrar...
¡Y así eternamente, claro!»

13.4

Como dice la canción:

«Si esta historia os gusta, (bis)
«Volveremos la-la-la a empezarla. (bis)
«¡Olé!, ¡olé!»

¿Cómo evitar la mala suerte del infeliz Zacarías? Muy sencillamente, considerando que el catálogo de todos los catálogos no es un «catálogo» como los demás sino un «supercatálogo»; y, por lo tanto, no puede ser clasificado teniendo en cuenta las propiedades de los otros. Con otras palabras, admitiendo que la «clase de todos los conjuntos» no es nunca un conjunto.
Así, los dos catálogos colocados en una de las dos alas del castillo no debían ser considerados como simples catálogos y no se les debía mencionar. Era preciso un lugar aparte: la mesa a donde los visitantes vendrían a consultarlos antes de ir a una estantería de la biblioteca.
Y ahora, si os extraña ver a los lógicos ocuparse de semejantes insensateces, sabed que una sola grieta en el edificio de las matemáticas haría que éste se hundiese lamentablemente y puesto que, después de todo, está construido sobre convenios lingüísticos, es preciso no crear situaciones peligrosas por la imprudencia de una composición defectuosa de palabras mal controladas.

14. Conjuntos objetivos y conjuntos subjetivos

14.1

Algunos matemáticos no consideran como correctamente construidos o definidos ciertos conjuntos como:

E_1 = {Luis XIV, Luis XV, Luis XVI, «Luis XVII», Luis XVIII}
E_2 = {el conjunto de cuadros hermosos del Museo del Louvre}.

En efecto, sabemos que un personaje llamado Naundorff fue considerado por muchos como el Delfín escapado del Temple. Si proponemos la cuestión:

¿Pertenece Naundorff a E_1?

para algunos la respuesta será afirmativa (Naundorff = Luis XVII),
y para otros negativa (Naundorff $\neq$ Luis XVII).

Si preguntamos ahora

¿Pertenece a E_2 El juramento de los Horacios?

(es decir, ¿es un hermoso cuadro El juramento de los Horacios?)
la respuesta será «sí» o «no» según la persona preguntada.

14.2

Podemos establecer aquí una definición correcta admitiendo que estos conjuntos no son «objetivos» (es decir, idénticos para todos los que los forman), sino «subjetivos» (dependientes de la persona que lo forma).
Por ejemplo, en 1943, el historiador André Castelot demostró que el niño muerto en el Temple, en el año II, era el hijo de Luis XVI y de María Antonieta.
Para él: Naundorff $\notin E_1$
y el conjunto E_1 está definido correctamente por André Castelot en el año 1943.

14.3

Discutimos a veces sobre la «belleza» de un cuadro, de un poema; sobre la «justicia» de una decisión, etc... Imaginemos ahora, puesto que empleamos las mismas palabras, que discutimos los mismos valores. ¿No sería mejor, previamente, formar el catálogo de los «cuadros que consideramos bellos», «los actos que consideramos justos», es decir, formar los conjuntos subjetivos creados por cada uno de nosotros?
Así, podríamos saber si las palabras que repetimos de idéntica manera corresponden al mismo concepto.

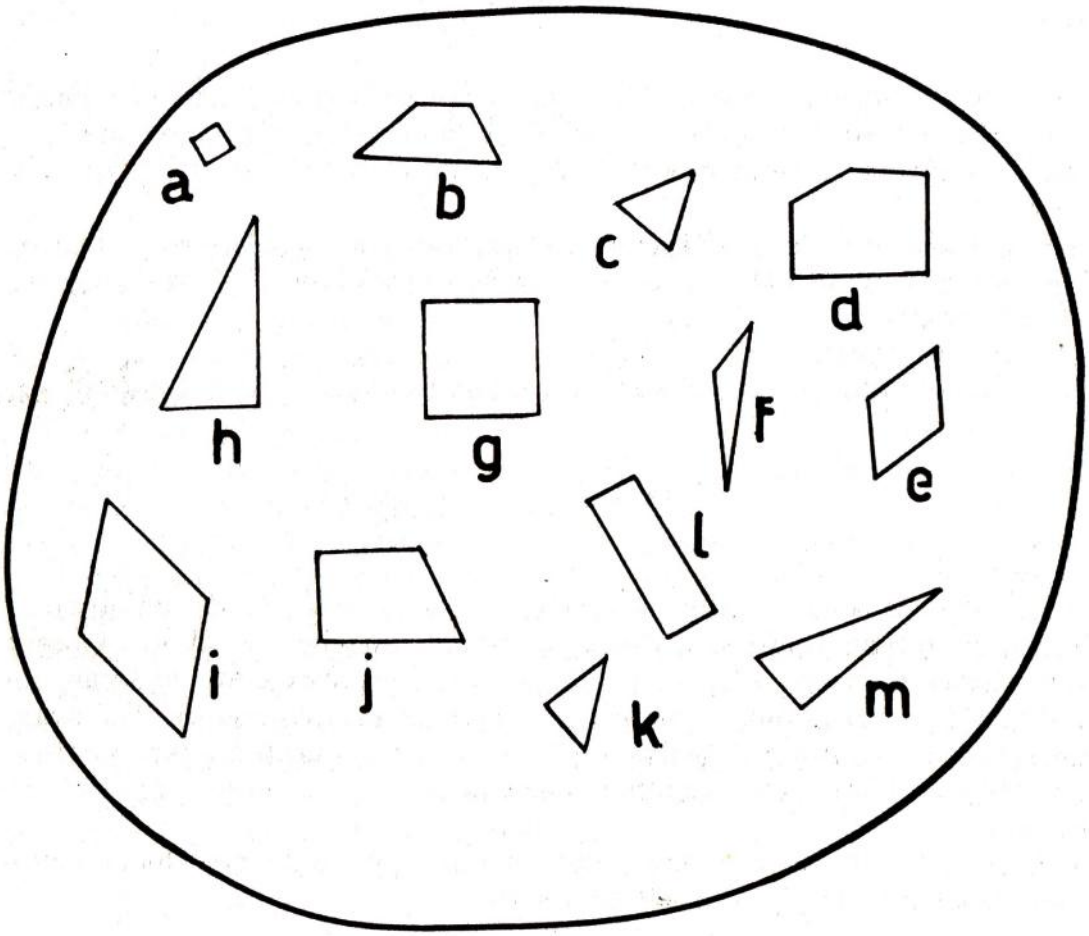
14.4

Un conjunto «subjetivo» queda correctamente definido en tanto se dice «según quién y en qué momento de su vida» se formó.
Si un conjunto subjetivo no varía según la persona, o según el momento en que fue formado, se llamará «objetivo». Pero ni que decir tiene que, como no se podrán jamás agotar los juicios de la humanidad, se considerará como «conjunto objetivo», tan pronto como un número suficientemente grande de individuos lo habrá formado de idéntica manera.
A los que no acepten este parecer común, se les llamará «locos», «alienados» o «insociables» y serán encerrados en cárceles o manicomios, donde formarán un nuevo conjunto: «el conjunto de los que no reconocen la objetividad de los criterios en la sociedad a la que ellos deberían pertenecer».

15. Cardinal de un conjunto

15.1

Consideremos el siguiente conjunto de figuras:



En este conjunto podemos definir distintos subconjuntos:

rectángulos	= {a, g, l}
trapecios	= {a, b, g, e, i, j, l}
triángulos	= {c, h, f, k, m}
pentágonos	= {d}
rombos	= {a, e, g, i}

Llamamos «cardinal» (o «número cardinal») de un conjunto, al número de sus elementos.

Así: «El cardinal de las Musas es 9»; que se escribe de esta manera:

Musas = 9

Y en nuestro ejemplo:

# rectángulos	= 3
# trapecios	= 7
# triángulos	= 5
# rombos	= 4

15.2

Podemos definir nuevos subconjuntos:

rombos rectángulos	= cuadrados = {a, g}
triángulos isósceles	= {c, h, k}
triángulos rectángulos	= {k, m}
triángulos isósceles rectángulos	= {k}
triángulos cuadrados	= { }
hexágonos	= { }

15.3

Hemos descubierto tres tipos de conjuntos que vamos a utilizar con frecuencia:

conjuntos que contienen dos elementos (cuyo cardinal es **dos**)
conjuntos que contienen un solo elemento (cuyo cardinal es **uno**)
conjuntos que no contienen elemento alguno (cuyo cardinal es **cero**).

16. Los pares

16.1

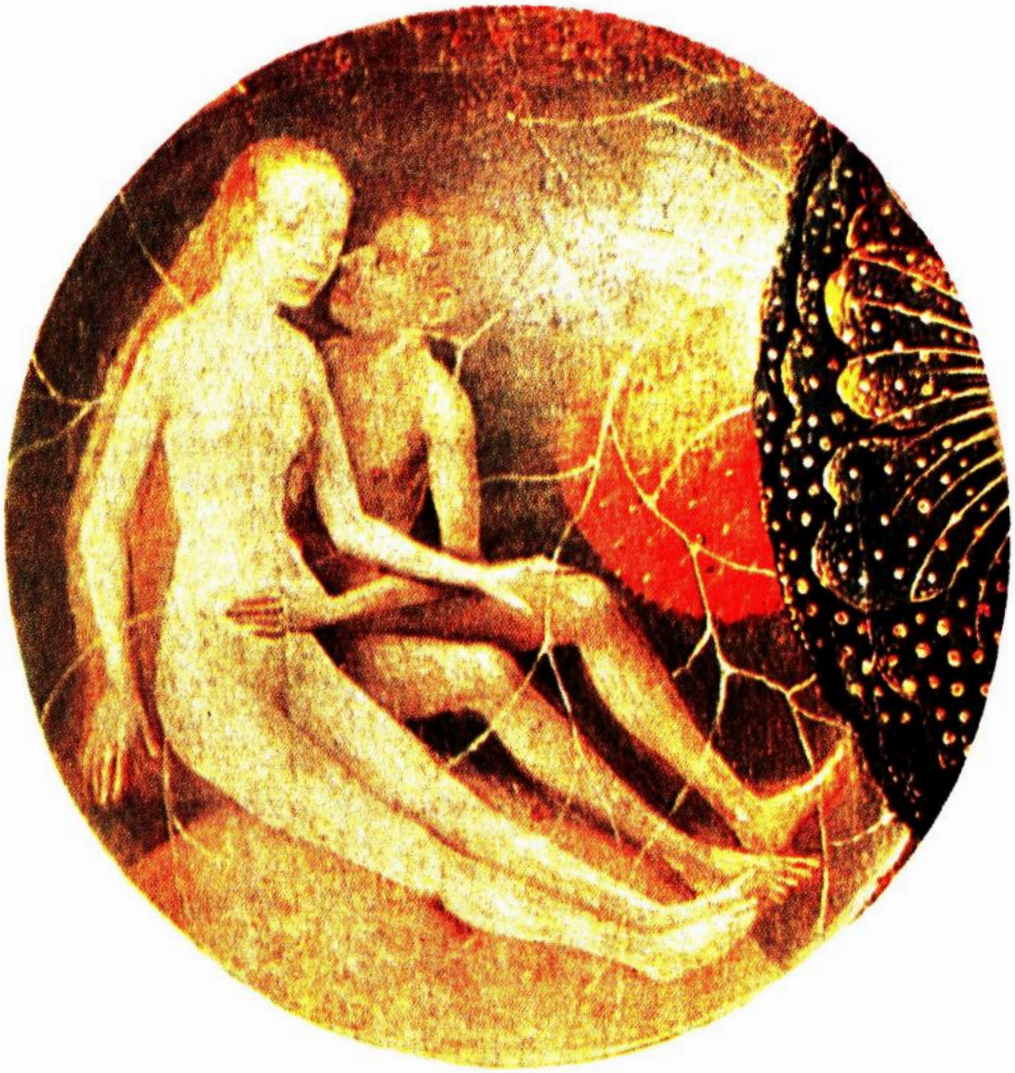
Los conjuntos que contienen dos (y sólo dos) elementos se llaman **pares.**

La palabra se utiliza en el lenguaje corriente. Sin embargo, la lengua usual hablará de pares de zapatos, de guantes, de gafas, de amigos...; de aquí el error frecuente de considerar que un par no contiene más que dos elementos «bastante parecidos».
La acepción que en el lenguaje usual se tiene de la palabra «par» proviene de su utilización como nombre «colectivo»: un par de...; de aquí la necesidad de hacer referencia a una propiedad común (gafas, guantes, etc, ...).

16.2

Matemáticamente hablando, **un par contiene dos elementos cualesquiera.**

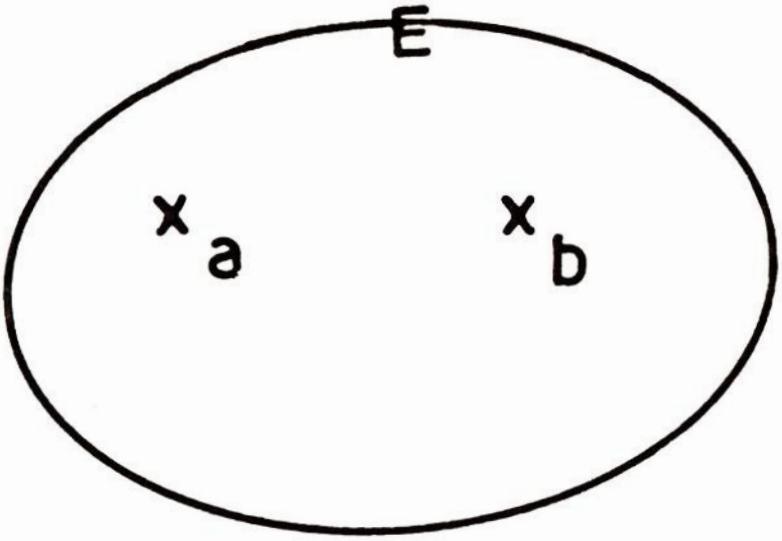
{el rey Dagoberto, la estrella polar}
{la Carta de los Derechos del Hombre, el caballo de Wellington en Waterloo}
{el metro patrón, Cleopatra}
son tres ejemplos de un par.



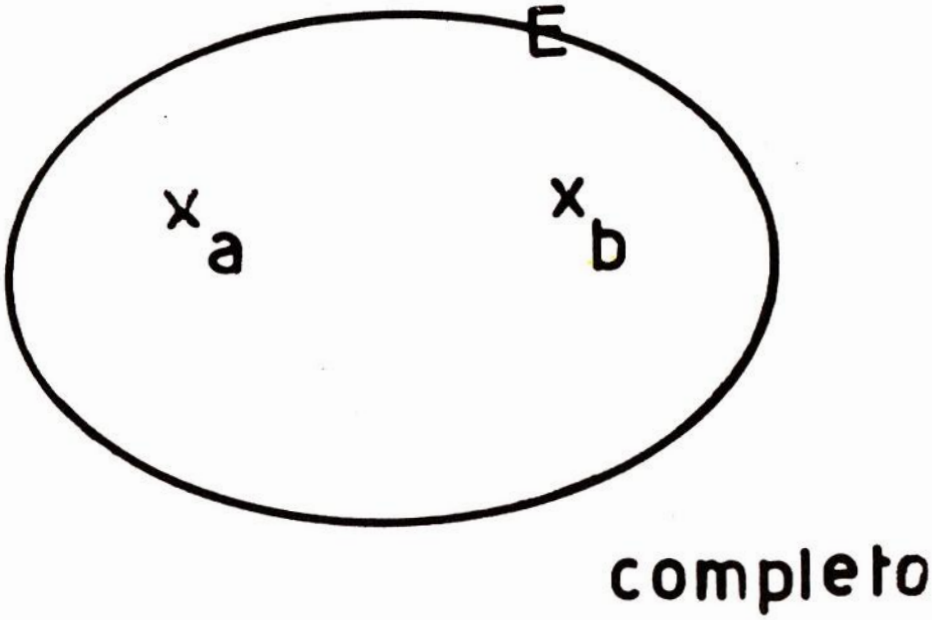
Dos individuos de sexo contrario en el círculo de Venn. Es un par; ¡no simboliza la castidad!

16.3

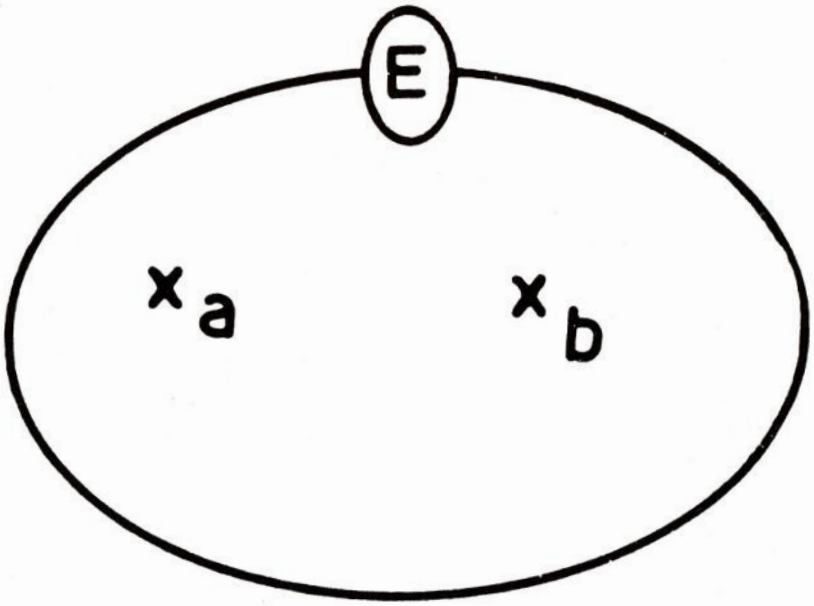
El ideograma de un par es:



Pero esta notación es defectuosa. No sabemos, en efecto, si la cuerda o línea contiene únicamente dos elementos. Será preciso convenir que el conjunto representado de esta forma está «completo». Algunos ponen «completo» al lado del conjunto (como en la entrada de un aparcamiento).



Se puede también rodear de una línea o colocar en una etiqueta el nombre del conjunto.
El ideograma de un par quedará, pues, así:



17. Los singletons

17.1

Los conjuntos que contienen un solo elemento se llaman **singletons.** Esta denominación pintoresca proviene del inglés y muy especialmente del juego de bridge. Algunos lo llaman «conjunto monario» aunque no es el más simple. Finalmente hay otros, que quizá por anglofobia, evitan utilizarla.

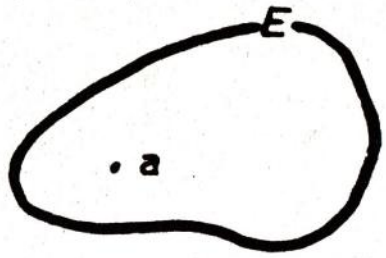
17.2

El ideograma de un singleton es

Este ideograma corresponde a la notación:

$$E = \{a\} \qquad \text{avec } \# \; E = 1$$

Este ideograma no debe confundirse con:



que expresa que el conjunto E contiene por lo menos un elemento, es decir, es «real».

17.3

El concepto de singleton es uno de los más difíciles de asimilar y su no adecuada utilización puede dar lugar a grandes confusiones. Al contrario que en otras ocasiones, aquí el lenguaje no nos ayuda nada.

Consideremos un objeto, por ejemplo la torre Eiffel:
¿Se le puede considerar simplemente como un objeto?
¿Se le puede considerar como un «conjunto» que no contiene más que un elemento, es decir, un singleton?
¿Se le puede considerar como un elemento de un singleton?
Estas especulaciones parecen bizantinas. De hecho se contestará: la torre Eiffel, ¡es la torre Eiffel! ¡Y no importa nada saber si la considero como un singleton o como un elemento de un singleton!
Estas cuestiones no se plantearían si no se utilizasen, no se considerasen o no se denominasen los objetos más que aisladamente.
Pero el problema empieza en el momento en que la singularidad se considera como un caso particular en el seno de una pluralidad.

17.4

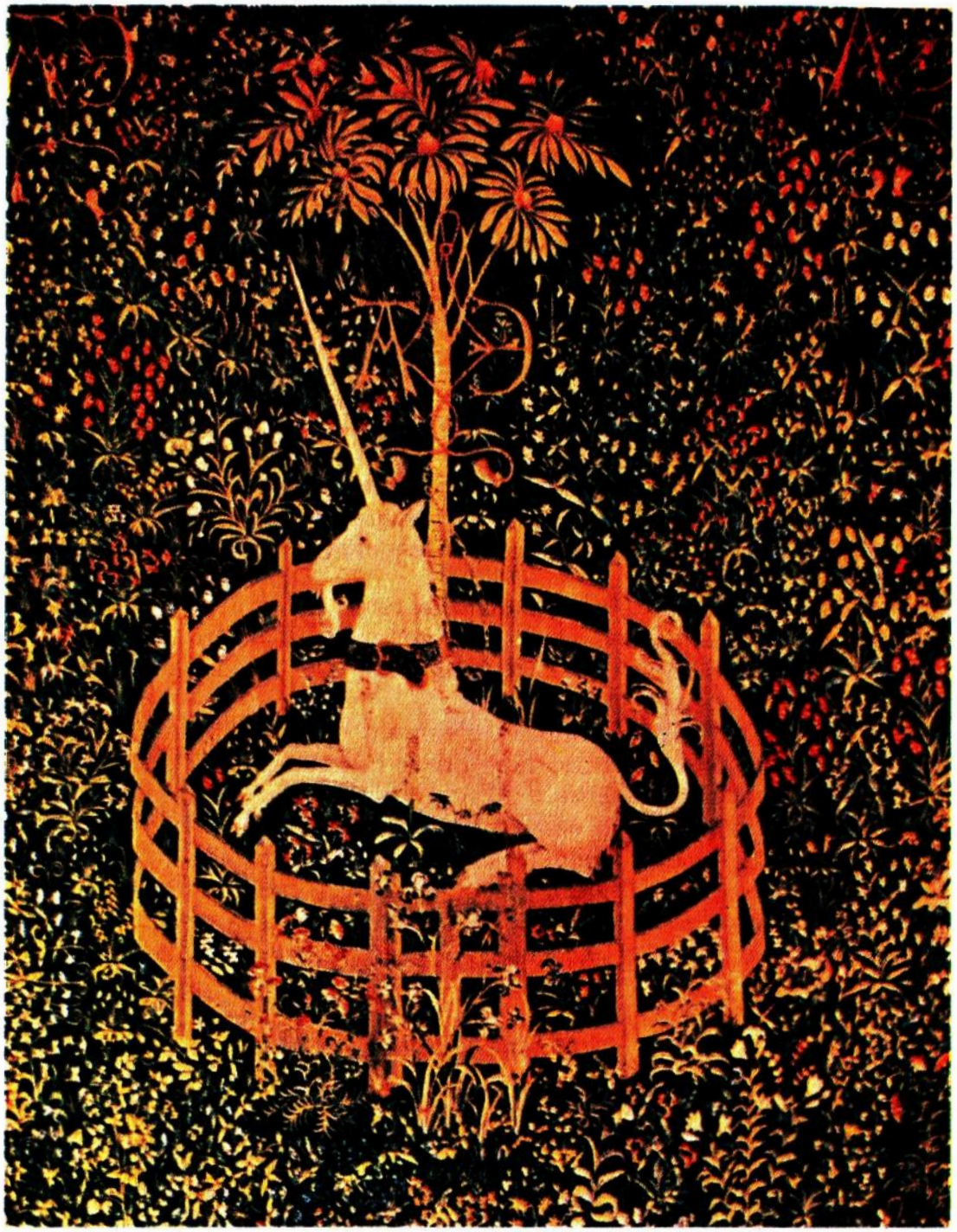
Comparemos los dos enunciados:
el profesor felicita a **los primeros de la clase**;
el profesor **los** felicita.
Es evidente que los dos sintagmas nominales (1) «los» y «los primeros de la clase» representan, según la lengua, un mismo conjunto.

Se podría representar por un ideograma:

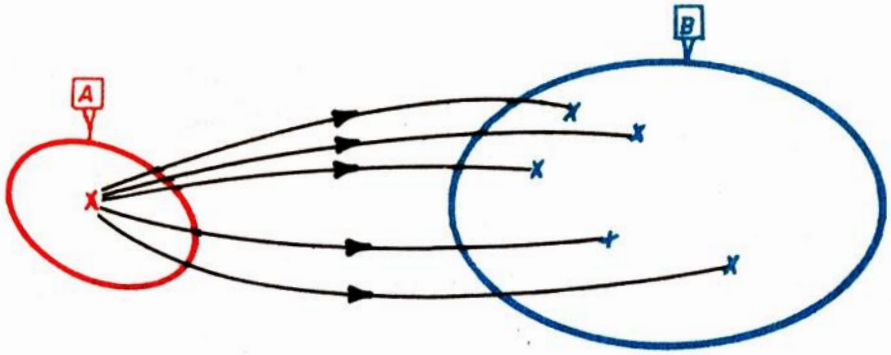
A = el profesor,
B = los primeros de la clase = los (pronombre C.D.),
→ = felicita.

---

(1) Sintagma nominal: estructura lingüística que representa un conjunto.



El unicornio en su pequeño corral de Venn. Simboliza la castidad: es un singleton.



17.5

Cambiemos, por un momento, los dos enunciados:
el profesor felicita **al primero de la clase**
el profesor **le** felicita.
No ha cambiado ni el sujeto, ni el significado del verbo, ni las funciones gramaticales. Es natural (es decir, más sencillo), considerar que **el C.D.** (1) **representa un conjunto,** tanto en singular como en plural.

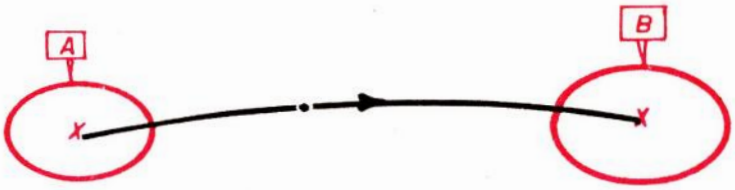
B = al primero de la clase = le (pronombre C.D.).

17.6

Volvamos a cambiar los dos enunciados:
el profesor felicita a **Santiago**
el profesor **le** felicita.
Ni el sujeto, ni el significado del verbo, ni las funciones gramaticales ni la forma del pronombre C.D. «le» han cambiado. Es natural (es decir, más sencillo) considerar que el C.D. representa un conjunto, que será representado por un nombre propio, un pronombre o un sintagma nominal.

---

(1) C. D.: complemento directo.



B = al primero de la clase = le (pronombre C.D.) = Santiago.

17.7

Nos hemos visto obligados, pues, para generalizar los significados de las estructuras de nuestra lengua, a admitir que un nombre propio representa un singulete (más bien que el objeto-elemento de un singleton).

Y podemos admitir que:
La torre Eiffel = conjunto de torres que se llaman «Eiffel».
Carlomagno = conjunto de hombres que se llaman «Carlomagno».
París = conjunto de ciudades que se llaman «París».
Etc.
Son ejemplos de definición por caracterización de conjuntos singleton.

17.8

Esto nos proporciona la definición gramatical de un nombre propio: estructura sintética (eventualmente compuesta) que es un único singleton en la universalidad del discurso [1].

17.9

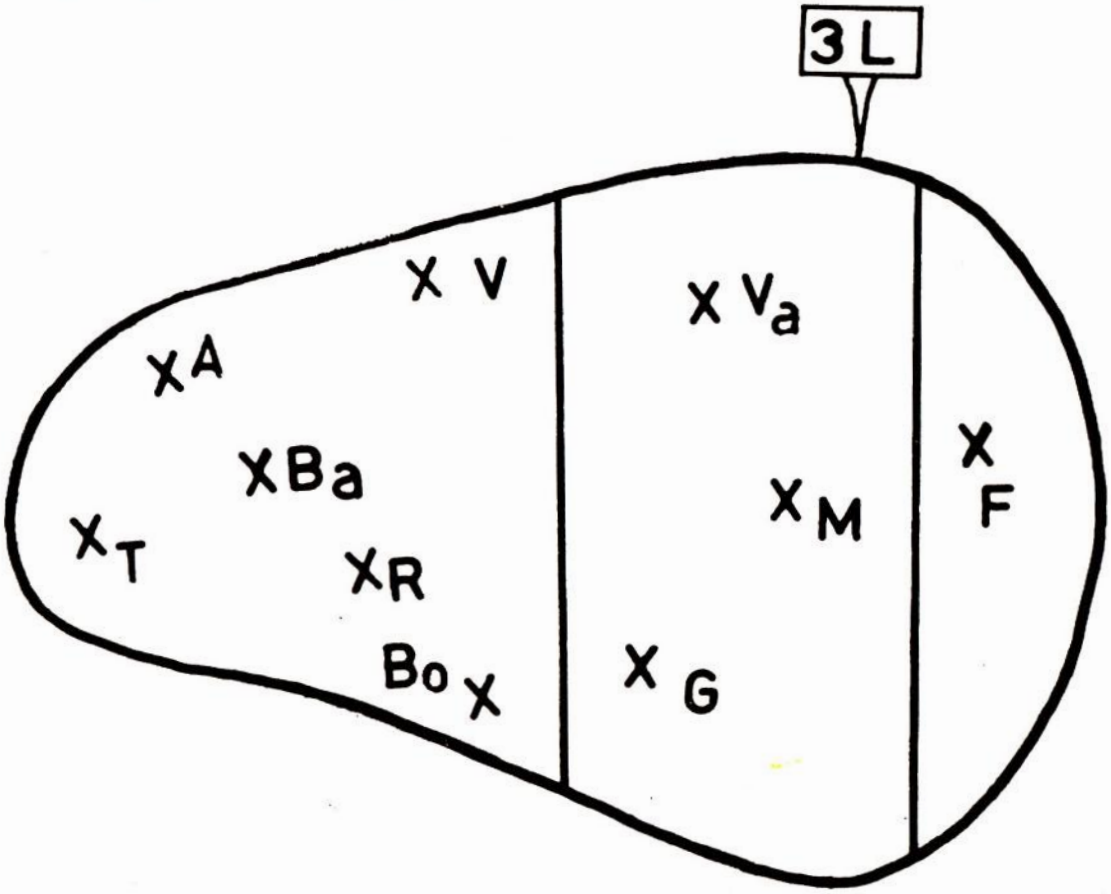
Consideremos el conjunto de clases y secciones de un centro de enseñanza media.
Las clases son de sexto, quinto, cuarto, etc...
Las secciones son de latín-griego, latín-matemáticas, latín-ciencias, etc.
Supongamos la clase formada por:

Abel	(3 LG)
Bartolomé	(3 LG)
Valentín	(3 LC)
Tomás	(3 LG)

(1) Explicaremos más tarde lo que es la «universalidad del discurso» (c. III, 10).

Francisco (3 LM)
Gabriel (3 LC)
Mariano (3 LC)
Bonifacio (3 LG)
Román (3 LG)
Víctor (3 LG)

La clase latina de tercero se descompone en 3 subconjuntos:
tercero latín-griego,
tercero latín-ciencias,
tercero latín-matemáticas.



La clase de tercero de latín-matemáticas no contiene más que un elemento: Francisco. Es, pues, un singleton.
Pero no se puede confundir esta clase con su elemento.
En efecto, las clases de 3 LG y 3 LC no pueden confundirse con sus elementos, puesto que tienen varios.
Por otra parte, según en qué cursos, esta clase de tercero latín-matemáticas podrá contener más de un elemento.
La clase de tercero de latín-matemáticas, no es, pues, el alumno Francisco en sí, sino considerado como un objeto.
Sin embargo, si un profesor dice: «doy clase de tercero de latín-matemáticas» se verá que da clase al alumno Francisco.

17.10

Hemos dicho anteriormente: en el universo hay «objetos».
Es nuestro espíritu el que concibe, nuestro lenguaje el que forma los conjuntos.
El mismo objeto (en este caso Francisco) podrá ser concebido, considerado como un singleton, o como elemento del singleton. Nuestra decisión es arbitraria y todo es cuestión de comodidad.

17.11

De todo esto podemos deducir algunas normas de escritura.
Así, no podremos escribir,
$a = \{a\}$!?
sino
$a \in \{a\}$
El elemento no es nunca igual a su singleton, pero está contenido en él.

No se podrá jamás escribir:

$E \in E$!? (cf. la trágica historia de Zacarías, 13.6)
sino
$E = E$
Un conjunto es igual a sí mismo, pero no se pertenece.

18. Conjunto vacío

18.1

Se podría afirmar que:
«Si un conjunto está formado de elementos, tan pronto como no los tenga, dejará de ser conjunto.»
No hay nada que objetar a esta proposición. Pero llegaríamos a una aritmética sin el **cero.** Numerosas civilizaciones lo han ignorado. Nosotros lo conocemos y lo utilizamos a menudo.
Lo que nos importa es crear una teoría coherente. Ciertamente, su creación es audaz; es preciso inventar un signo, una palabra, que existirá como signo, pero que representará una ausencia.
Los griegos y los romanos no se atrevieron a usarlo, al menos en su aritmética. Los caldeos, hindúes, árabes y mayas corrieron el riesgo. Y, gracias a las cruzadas, imitamos a los árabes porque al «cero» le llaman «cyfra», lo que nos proporciona la palabra «cifra».

18.2

Para convencernos de que el **«cero»** es un número, hablaremos de «un conjunto cuyo cardinal es cero», es decir, «el conjunto que con-

tiene cero elementos», o sea, **el conjunto vacío.** Pero esto no es más que una manera de hablar. Es lógicamente equivalente decir: «estas dos rectas no se cortan» y «estas dos rectas tienen un conjunto vacío de puntos comunes»; del mismo modo que son lógicamente equivalentes las frases: «No le doy ningún libro» y «le doy cero libros».
La lengua castellana tiene artículos de conjuntos vacío.
La lengua reconoce, nombra y utiliza el conjunto vacío. No hacemos más que extender a la matemática los convencionalismos del lenguaje.

Ejemplos:
¡Ni el menor trocito de hierba o de gusano! (conjunto vacío).
Ningún matemático (conjunto vacío) ha podido demostrar el teorema de Fermat.
¿Quién ha entrado?... **¡Nadie!** (conjunto vacío).
¿Qué dices?... **¡Nada!** (conjunto vacío)

18.3

Hablar del conjunto vacío, es decir, considerar el vacío como conjunto, unifica el lenguaje y, por lo tanto, las ideas.
Admitiremos, pues, que:

Un conjunto que no contiene ningún elemento es el conjunto vacío.

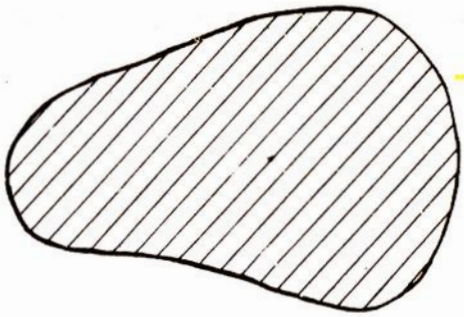
Escribiremos:

$$\text{conjunto vacío} = \{\ \}$$

o también

$$\{\ \} = \varnothing \qquad (1)$$

El ideograma del conjunto vacío es:



donde el rayado expresa que el conjunto no contiene ningún elemento.

(1) Esta letra se lee a veces «fi». De hecho proviene del alfabeto escandinavo y se lee «vacío» o «conjunto vacío».

18.4

Evidentemente, todos los conjuntos vacíos son iguales.
Un conjunto vacío de manzanas es igual que un conjunto vacío de elefantes o que un conjunto vacío de diamantes. Por consiguiente:

No hay más que un único conjunto vacío.

Y ya que hemos dicho »hay», llegamos a la extraordinaria consecuencia: **«el conjunto vacío existe».**
El conjunto vacío existe en nuestro pensamiento como concepto. Las palabras «conjunto vacío» existen en nuestro lenguaje, en nuestra escritura. Estas palabras sostienen el concepto de «vacío».
Esto es lo mismo que decir que «el número cero existe». Y si lo ponéis en duda recibiréis un «cero» para convenceros de su existencia.

19. Los conjuntos de conjuntos y su jerarquía

19.1

Una baraja es un conjunto de 48 naipes.
Pero nadie nos impediría considerar un conjunto formado, ahora, por barajas. El comerciante encarga barajas y no cartas; así una gruesa de barajas:

una gruesa de barajas = 144 barajas,
una baraja = 48 naipes.

Un conjunto de barajas es un conjunto hecho con barajas. En efecto, no se pueden cambiar entre sí los naipes, pero sí las barajas.
Esto ilustra el siguiente principio:

Todo conjunto puede ser considerado como elemento de un nuevo conjunto

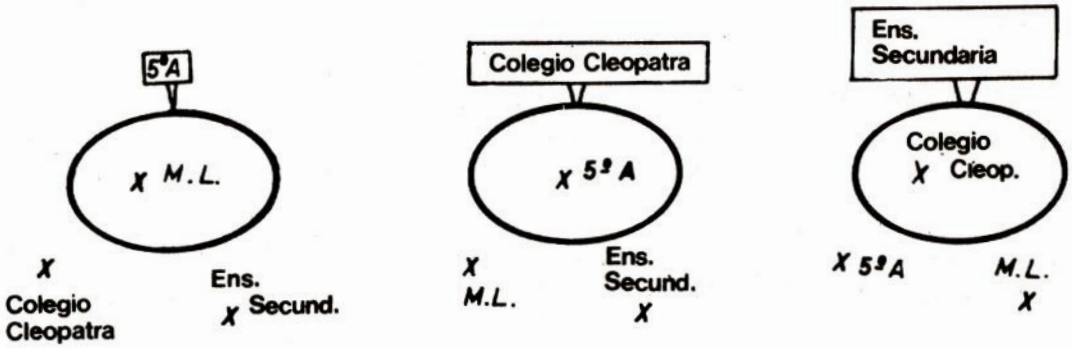
o también:

Todo conjunto es un objeto.

19.2

Una clase (escolar) es un conjunto de alumnos:
6.º A = {Pedro Domínguez, Mónica López, ..., Enrique Pérez}.
Un colegio puede ser considerado como un conjunto de clases:
Colegio Cleopatra = {6.º A, 6.º B, 6.º C, 5.º A...}
Un distrito escolar puede ser considerado como un conjunto de centros de enseñanza:

Enseñanza Media = {Colegio Cleopatra, Colegio Margarita de Borgoña}.
La enseñanza nacional se puede considerar como un conjunto de distritos escolares:
Enseñanza nacional = {enseñanza primaria, enseñanza media, enseñanza universitaria, ...}
Podemos escribir, por ejemplo:
Mónica López $\in$ 5.º A $\in$ Colegio Cleopatra $\in$ Enseñanza Media $\in$ Enseñanza nacional.
Pero, en cambio:
Mónica López $\notin$ Enseñanza media (considerada como un conjunto de colegios).
Tenemos, pues, los ideogramas:



19.3

Nos encontramos con otra imprecisión del lenguaje usual. ¿Hay que considerar un colegio como un conjunto de «clases» o como un conjunto de alumnos?
¿Hay que considerar un país como un conjunto de provincias, como un conjunto de comunidades, o como un conjunto de ciudadanos?

19.4

Podemos fijar una jerarquía entre conjuntos construidos de determinada manera:

$A = \{a, b, c, d, \ldots\}$.
$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, \ldots\}$.
$\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \}$
etc...
$a \in A \in \mathcal{A} \in \mathfrak{A} \in \ldots$

A veces se numera esta jerarquía a partir de un cierto conjunto inicial. Se llama **«tipo»** de conjunto a este índice de numeración.

En el ejemplo anterior:
si suponemos que A es del tipo 1
entonces α es del tipo 2
$\mathcal{A}$ es del tipo 3 etc...

19.5

Hay que desconfiar, sin embargo, de la jerarquía de los tipos, ya que se pueden construir conjuntos según distintas jerarquías:

$E_1 = \{ a, b \}$

$E_2 = \{ a, E_1 \} = \{ a, \{ a, b \} \}$

$E_3 = \{ a, b, E_1, E_2 \}$

$E_4 = \{ b, E_3 \}$

etc.

o bien:

$a \in E_1 \quad b \in E_1 \quad E_1 \in E_2 \quad E_2 \in E_3 \quad E_3 \in E_4$

$a \in E_2 \quad b \in E_3 \quad E_1 \in E_3$

$a \in E_3 \quad b \in E_4$

Así, por ejemplo, si:

p es un punto, y

D una recta considerada como un conjunto de puntos,

podemos formar el conjunto {p, D}.

19.6

El empleo del substantivo colectivo, en la lengua, nos proporciona la doble posibilidad para determinados objetos de ser considerados, a la vez, como conjunto y como elemento.

Comparemos:

Una manada de lobos han asolado / ha asolado los campos.

En

«Una manada de lobos han asolado los campos»,

el núcleo del sujeto es «lobos»; podemos hacer sustituciones:

— una manada de lobos han asolado los campos,
— los lobos han asolado los campos,
— veinte lobos han asolado los campos,
— algunos lobos han asolado los campos.

El sujeto es un conjunto en el cual cada elemento es un lobo (1).

---

(1) Si «lobos» es el núcleo del sujeto, quizá os preguntaréis cuál es la función sintáctica de «una manada de». Planteadle esta cuestión a un gramático tradicional. Su silencio os extrañará.
Proponedle luego considerar «una manada de» como un «artículo», es decir como un «indicador de conjunto». Y gozaréis, entonces, de su desprecio, de su furor, y, por qué no, de su curiosidad.

En
«Una manada de lobos ha asolado los campos»,
el núcleo del sujeto es «manada»; «de lobos» es un complemento del nombre que caracteriza al núcleo; podemos hacer las sustituciones:

— una manada de lobos ha asolado los campos,
— una manada hambrienta ha asolado los campos,
— una manada destructora ha asolado los campos.

De la misma manera:

— una manada de lobos ha asolado los campos,
— la manada de lobos ha asolado los campos,
— esta manada de lobos ha asolado los campos.

El sujeto del verbo es un singleton.
La caracterización por el complemento del nombre recuerda que es un conjunto que se ha convertido en elemento del singleton sujeto.
Los nombres colectivos pueden expresar a un mismo tiempo:
un conjunto de elementos,
el elemento de un singleton.

Ejemplos: colección, ejercicio, grupo, clase, asociación, tropa, banda, horda, enjambre, rebaño, montón, pandilla, patrulla, regimiento, equipo, etc...

19.7

Sabemos que todo conjunto puede ser considerado como elemento de otro conjunto.
¿Es cierto a la inversa?
Tomemos, por ejemplo, una expedición de mercancías formada por un conjunto de camiones cargados con cestas de huevos:

la expedición de mercancías = conjunto de cargas de camión,
un cargamento de camión = un conjunto de cestas de huevos,
una cesta de huevos = un conjunto de huevos,
pero: un huevo = un huevo.

No hay manera de considerar un huevo como una pluralidad, salvo en el caso de convertirlo en tortilla (con cáscara y todo). Pero entonces dejaría de ser un huevo con yema, clara, cáscara capaz de convertirse en huevo pasado por agua, escalfado o quizás en un pollito después de incubarlo.
En consecuencia, **todo elemento de un conjunto no puede ser considerado necesariamente como un conjunto.**

20. La teoría natural y la teoría axiomática

Todo lo que acabamos de decir está expuesto desde el punto de vista «natural», como si los convenios establecidos cubrieran una cierta intuición de la realidad.
Hemos convenido cierto lenguaje adaptándolo, a lo que creemos que es la realidad, según nuestro lenguaje usual.
Hay otra manera de construir la teoría de los conjuntos.
El matemático enuncia un número lo más pequeño posible de propiedades iniciales (los axiomas), y las reglas para aplicar dichas propiedades, sin, aparentemente, inquietarse por las analogías que pueda haber entre los axiomas y la realidad. A continuación pone en funcionamiento el mecanismo del lenguaje a partir de los axiomas y deduce todas las propiedades elaborando una teoría. Este método es muy cómodo porque evita los escollos de la incomunicabilidad. Siempre, desde el punto de vista pedagógico, la teoría es dogmática.
En efecto, los «axiomas» no están ni preparados, ni estructurados en nuestro cerebro como Atenea bajo la cabeza de Zeus. El matemático, como todos los que le han precedido, ha creado en el transcurso de los siglos esta herramienta abstracta, el lenguaje matemático, por analogía con la realidad.
Una «física» va precedida siempre de unos «axiomas» sin los cuales todo sería posible y todo estaría permitido.
Ciertamente, todo es posible y permisible. Pero entonces sería preciso separar lo que es «juego» de lo que es «física», que pretende describir abstractamente lo real extrapolándolo quizás muy ampliamente, de lo que es sueño gratuito sobre signos sin significado alguno.
Muchos matemáticos viven con la ilusión de que su axiomática es libre. La torre de marfil de su soberbio aislamiento no permite la comunicación pedagógica con los niños que viven con los dos pies clavados en el suelo, ávidos de apoderarse del mundo con todas sus fuerzas y dispuestos a conocer las técnicas de este futuro poder.

2

PARTES DE UN CONJUNTO: LA INCLUSION

El niño está sobre un montón de arena.
Desde lo alto de este Himalaya, toma posesión de sus dominios. Introduce la mano en esta arena y la saca llena. Un hilillo fluido se escapa de su puño cerrado.
Un gesto acompaña a todo lo que hace: partición, inclusión, ajuste de conceptos, cadena de razonamientos...

1. Subconjunto e inclusión

1.1

El concepto de **parte** de un conjunto lo adquirimos inmediatamente después de considerar que:
el puñado de arena es **parte** del montón de arena; un equipo de alumnos de una clase es una **parte** de esta clase; los platos de que dispone un ama de casa forman **parte** del servicio de mesa; etc...

1.2

Se llama **parte** o **subconjunto.** Este concepto no es «absoluto». Nada es subconjunto «PER SE» (por sí mismo), sino con respecto a otro conjunto.

1.3

Toda parte de un conjunto es un conjunto.

1.4

Se dice indistintamente:
B es parte de A.
B es subconjunto de A.
B está **contenido** en A.
A **contiene** a B.

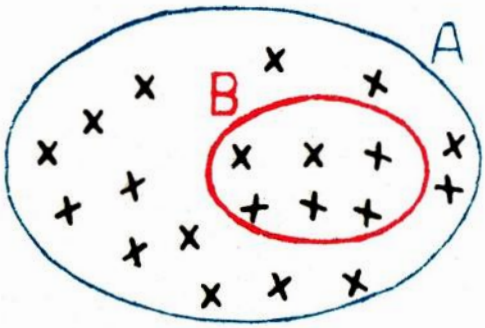
Se escribe:

$B \subset A$ B está contenido en A.

$A \supset B$ A contiene a B.

1.5

El concepto de la inclusión se representa por localización espacial. «Estar en» es caso particular de «estar contenido en».



$B \subset A$

1.6

Ejemplos:

El conjunto de los múltiplos de 6 está contenido en el conjunto de los múltiplos de 2;

que también se puede decir:

«Todo múltiplo de 6 es múltiplo de 2»;

«Todos los múltiplos de 6 son múltiplos de 2»;

«Todo múltiplo de 6 es par»;

«Un múltiplo de 6 es necesariamente múltiplo de 2»;

«Los múltiplos de 6 son múltiplos de 2»;

etc...

que se escribe: $M_6 \subset M_2$.

El conjunto de las vacas está comprendido en el conjunto de los mamíferos;

o también:

El conjunto de los mamíferos comprende al conjunto de las vacas.

Lo que hace que pueda decirse:

«Las vacas son mamíferos»;

«Entre los mamíferos hay vacas»;

«No hay ninguna vaca que no sea mamífero»;

etc...

2. Pertenencia e inclusión

2.1

Los principiantes confunden frecuentemente la **pertenencia** con la **inclusión.** Es fácil distinguir estas dos nociones si se tiene en cuenta que:

La inclusión es una relación **reflexiva**
(cf. **4.1** y cap. V).
Siempre $A \subset A$
La inclusión relaciona dos conjuntos y cada uno de ellos puede tener varios elementos:

$\}a, b, c\{ \subset \}a, b, c, d\{$

La pertenencia es una relación **antirreflexiva**
(cf. cap. V).
Siempre $A \notin A$
La pertenencia relaciona un único elemento con un conjunto que puede comprender varios elementos:

$c \in \}a, b, c, d\{$

2.2

$\}a\{ \subset E$ y $a \in E$
expresan lo mismo bajo dos formas diferentes.

Es equivalente considerar:
la inclusión de un singleton en un conjunto;
la pertenencia a este conjunto del elemento contenido en este singleton.
Si consideramos un objeto, es indiferente concebirlo como:
singleton de un elemento;
elemento de un singleton.
Si expresamos una relación entre un objeto y un conjunto, la relación será, según nuestra manera de considerar el objeto, o bien una pertenencia, o bien una inclusión. De aquí la confusión frecuente entre estas dos relaciones.

2.3

Ejemplos:
«Sócrates es mortal» puede significar:
o bien «el elemento Sócrates **pertenece** al conjunto de los mortales»,
o bien «el singleton Sócrates **está contenido** en el conjunto de los mortales».
«Los hombres son mortales» puede significar:
o bien «cada elemento (hombre) pertenece al conjunto de los mortales»;

o bien «todo singleton (hombre) está contenido en el conjunto de los mortales»;
o bien «el conjunto de todos los hombres está contenido en el conjunto de los mortales».
Tradicionalmente, los lógicos optan por ciertas interpretaciones.

Por ejemplo:

el silogismo:	se traduce por:
Sócrates es un hombre	$s \in H$
y los hombres son mortales,	y $H \subset M$
luego, Sócrates es mortal	luego $s \in M$

o sea

s = elemento «Sócrates»
H = conjunto «los hombres»
M = conjunto «los mortales»

Pero el mismo silogismo puede traducirse por:

$S \subset H$
y $H \subset M$
luego $S \subset M$
S = singleton Sócrates.

o sea

A partir del lenguaje en el que esto está expresado, nadie podrá decidir si estos enunciados significan una inclusión o una pertenencia. A lo sumo podríamos desear que los gramáticos eligiesen de los dos significados el que unifique al máximo su descripción de las estructuras lingüísticas.
Comparemos las dos opciones:

Sócrates es mortal:

Sócrates: elemento: El enunciado expresa pertenencia.	Sócrates: singleton. El enunciado expresa inclusión.

Los hombres son mortales:

Los hombres: conjunto. El enunciado expresa inclusión. «ser» cambia de significado y expresa o bien pertenencia, o bien inclusión; el sujeto de «ser» es o bien un elemento o un conjunto.	Los hombres: conjunto: El enunciado expresa inclusión. «ser» conserva el significado (aquí, siempre inclusión); el sujeto es siempre un conjunto. Esta interpretación filológica es la más sencilla, pero la más general.

¿Se nota diferencia de significado entre las dos cópulas «ser»?
¿Sí? Entonces, es preciso admitir que «Sócrates» está considerado como un singleton de un elemento. Y obtenemos la más sencilla de las dos interpretaciones lingüísticas.

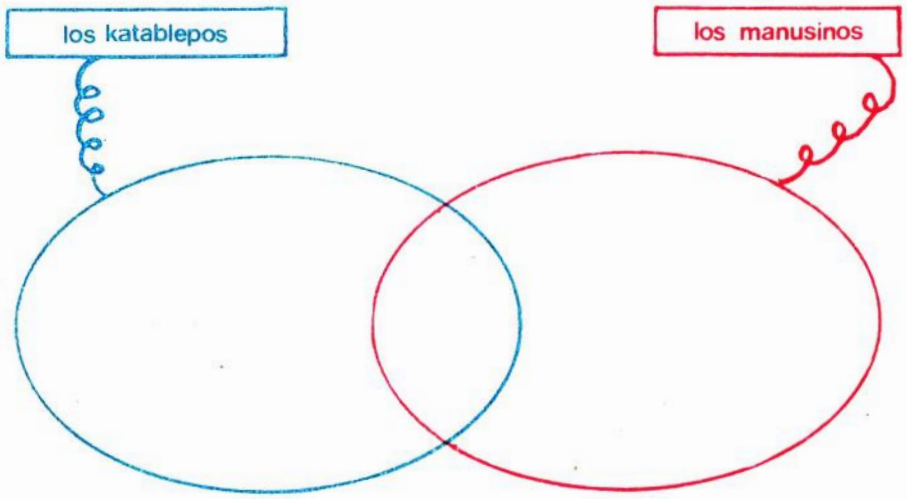
Y recordemos que es rigurosamente equivalente escribir:

$$s \in M \qquad \text{o} \qquad \{s\} \subset M$$

3. La inclusión como enunciado de ausencia

3.1

Vamos a hora a considerar el conjunto de los katablepos y el de los manusinos.
Se os pide que los representéis con dos ideogramas.
Lo fastidioso es que ni vosotros (ni yo) sabemos lo que es un katablepo ni tampoco lo que es un manusino.
No queda más remedio que considerar dos conjuntos en una situación de por sí muy general.



¡Atención! Sobre todo no pongáis puntos o cruces en estos conjuntos.
Después de todo ¿existen los katablepos o los manusinos?

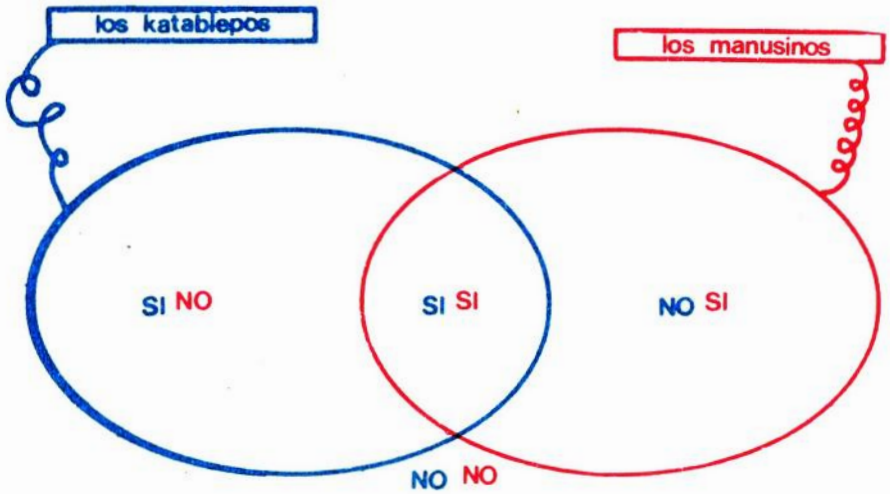
3.2

Vuestro ideograma es muy cómodo. En efecto, si encontráis el siguiente objeto

y si le preguntáis sucesivamente:
—¿eres un katablepo?
—¿eres un manusino?
podréis localizarlo cómodamente en el ideograma según sus respuestas.

Primera pregunta: ¿eres un katablepo?	Segunda pregunta: ¿eres un manusino?
sí	sí
sí	no
no	sí
no	no

Y podéis apuntar su localización elegida según las respuestas dadas:

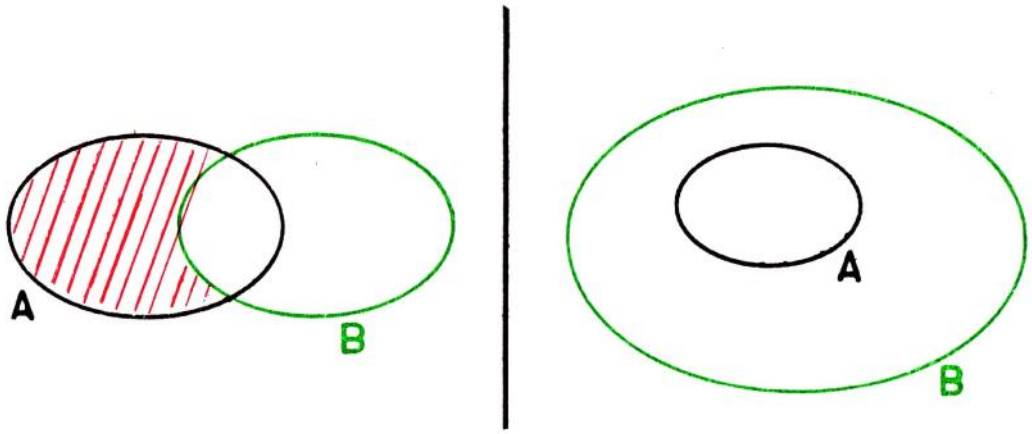


3.3

Estos katablepos y estos manusinos, de los que no sabéis nada, os empiezan a asustar.
Provistos de vuestro ideograma, vais a casa de la adivina y le preguntáis algunas cosas sobre vuestras obsesiones patatoidales.
Os contesta:
«todos los katablepos son manusinos»;
es decir, con palabras de adivina matemática,
«el conjunto de los katablepos está incluido en el conjunto de los manusinos».
Preparaos, pues, a retocar vuestro ideograma teniendo en cuenta esta vez la inclusión. Pero inspirada, la adivina vocifera:
«Maldición para quien malgasta sus ideogramas y no aprovecha de ellos todo su saber.»
Entonces recoged el dardo de genio, y modificad con trazos vuestro ideograma:

expresando así que no hay katablepo que no sea manusino. ¡Ya está!
No os diré lo que son los katablepos ni los manusinos.
Pero seguramente estaremos de acuerdo en admitir que son objetos muy útiles, pues nos han enseñado una nueva escritura ideográfica.

Los ideogramas de inclusión [1]



son equivalentes,
sin embargo

El ideograma nos dice que no hay respuesta «sí-no» a las preguntas
¿es un A?
¿es un B?

El ideograma nos proporciona un esquema simplificado donde la parte vacía está ya eliminada.

Utilizaremos una u otra de estas representaciones según las necesidades del momento.

3.5

La zona vacía se escribe A \ B (A menos B) [2].

Volveremos a hablar de esto cuando estudiemos las operaciones de las partes de un conjunto (cap. III).

---

(1) El ideograma de la derecha es el de Euler (que representa directamente situaciones particulares).
El ideograma de la izquierda es el de Venn (que lleva las informaciones particulares al diagrama general).

(2) El conjunto A \ B (A menos B) está formado por los elementos que pertenecen a A sin pertenecer a B.
Ejemplo: (a, b, c, d) \ (c, d, f, g, h) = (a, b)
(c, d, f, g, h) \ (a, b, c, d) = (f, g, h)
(a, b, c) \ (a, b, c, d, f) = ∅

Tenemos, pues:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \varnothing)$$ [1]

Que es lo mismo que decir:

todos los a son b

o

no hay a que no sea b.

Y, curiosamente, descubrimos que el verbo «ser» en el primer enunciado no conduce a la expresión de una existencia, sino más bien de una no existencia.

Ejemplos:

los múltiplos de 6 son pares ⇔ no hay múltiplo de 6 que sea impar,
los hombres son mortales ⇔ no hay ningún hombre inmortal,
los katablepos son manusinos ⇔ no hay katablepo que no sea manusino.

4. Reflexividad de la inclusión

4.1

Sabemos que $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \varnothing)$

$A \setminus B$ está formado por elementos que pertenecen a A sin pertenecer a B.

En consecuencia:

$A \setminus A$ está formado por elementos que pertenecen a A sin pertenecer a A; es decir, que no está formado por ningún elemento;

y por lo tanto:

$A \setminus A = \varnothing$.

Se verifica siempre:

$$A \subset A$$

Cualquier conjunto está siempre contenido en sí mismo.

4.2

Esta propiedad se puede enunciar de una manera más general:

La inclusión entre conjuntos es una relación reflexiva [2]

---

(1) El signo ⇔ significa la equivalencia entre dos enunciados; podemos traducirlo por:
«es lo mismo que»
«es verdadero o falso al mismo tiempo que».
Por ej.: Luis XIV muerto en 1715 ⇔ el Rey Sol muerto en 1715.

(2) V. las relaciones (cap. V).

Es de «sentido común» considerar que si se construye una parte de un todo, es preciso, al menos, restringir este todo. Es natural distinguir dos tipos de inclusión:

4.3

la inclusión general (1)

$$A \subset B$$

que corresponde a la inclusión tal como la hemos descrito

$$(A \underset{\text{str.}}{\subset} B) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ \text{y} \\ A \neq B \end{cases}$$

la inclusión estricta

$$A \underset{\text{str.}}{\subset} B$$

que corresponde a la inclusión entre conjuntos distintos

Llamaremos parte **estricta** (o parte **propia**) de A a toda parte de A distinta de A.

4.4

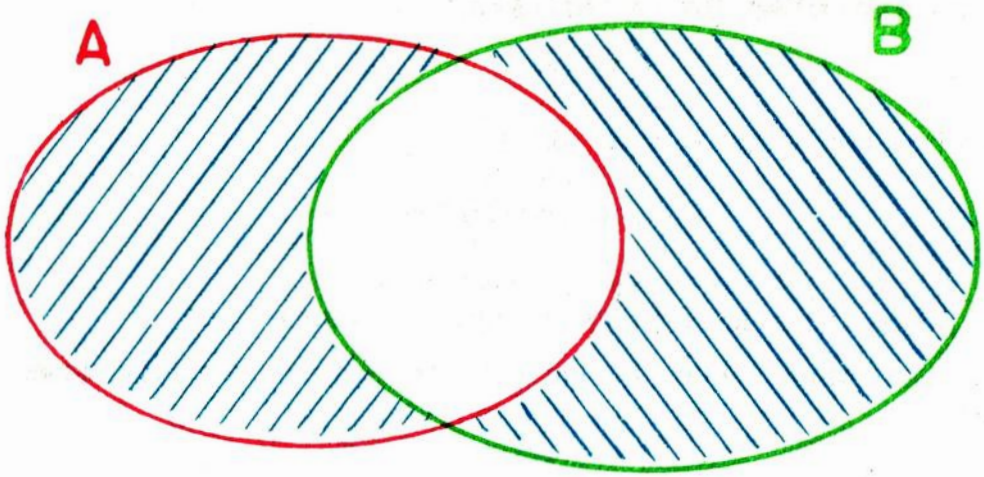
Concluyendo: $A \subset A$ es siempre cierto.
$A \underset{\text{str.}}{\subset} A$ es siempre falso.

5. Antisimetría de la inclusión

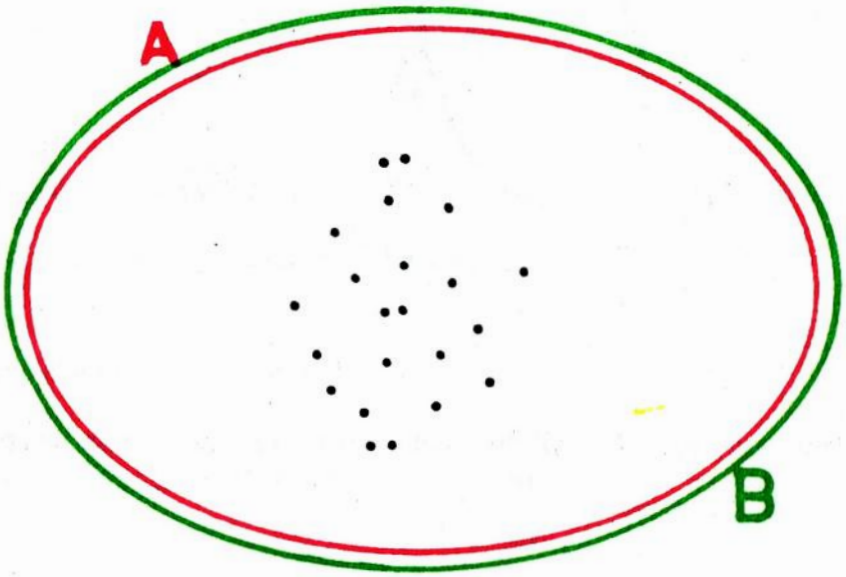
Sean A el conjunto de los múltiplos de dos,
B el conjunto de los números pares.
Sabemos que $A \subset B$, es decir, que $A \setminus B = \varnothing$
los múltiplos de dos son pares;
y que $B \subset A$, es decir, que $B \setminus A = \varnothing$
los números pares son múltiplos de dos.
Lo que corresponde al ideograma de Venn.

(1) A veces encontraréis las notaciones:

$\subset\subset$ o $\subseteq$ para la inclusión general
$\subset$ para la inclusión estricta.



Deducimos de él que los conjuntos A y B son el mismo conjunto. Podríamos utilizar también el ideograma de Euler (más difícil de entender).



Entonces:

$$\left.\begin{array}{c} A \subset B \\ y \\ B \subset A \end{array}\right\} \Leftrightarrow (A = B)$$

Esta propiedad se puede enunciar también:

La relación de inclusión entre dos conjuntos es antisimétrica [1]

(1) V. las relaciones (cap. V).

6. Transitividad de la inclusión

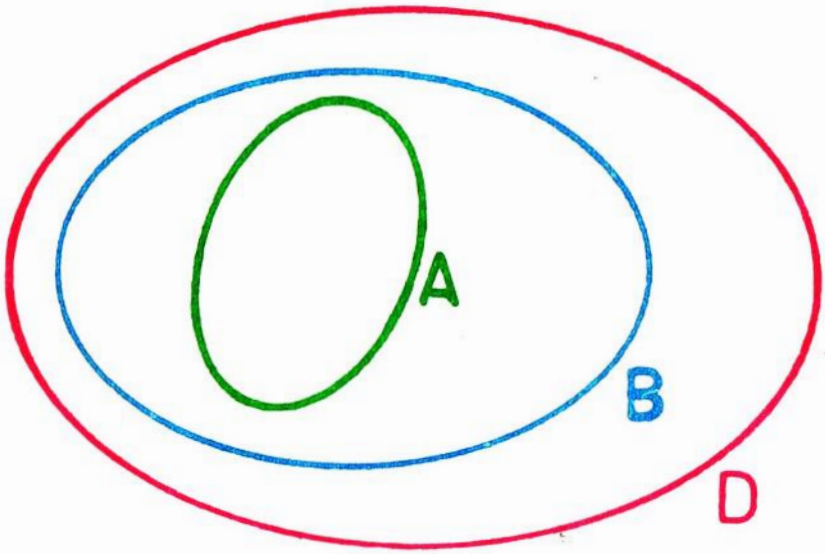
6.1

Sean tres conjuntos: A = las vacas,
B = los mamíferos,
D = los vertebrados.

Sabemos que:

$A \subset B$ las vacas son mamíferos,
$B \subset D$ los mamíferos son vertebrados.

Estas dos informaciones bastan para representar los ideogramas de Euler:



Y constatamos que $A \subset D$ es decir, que las vacas son vertebrados.

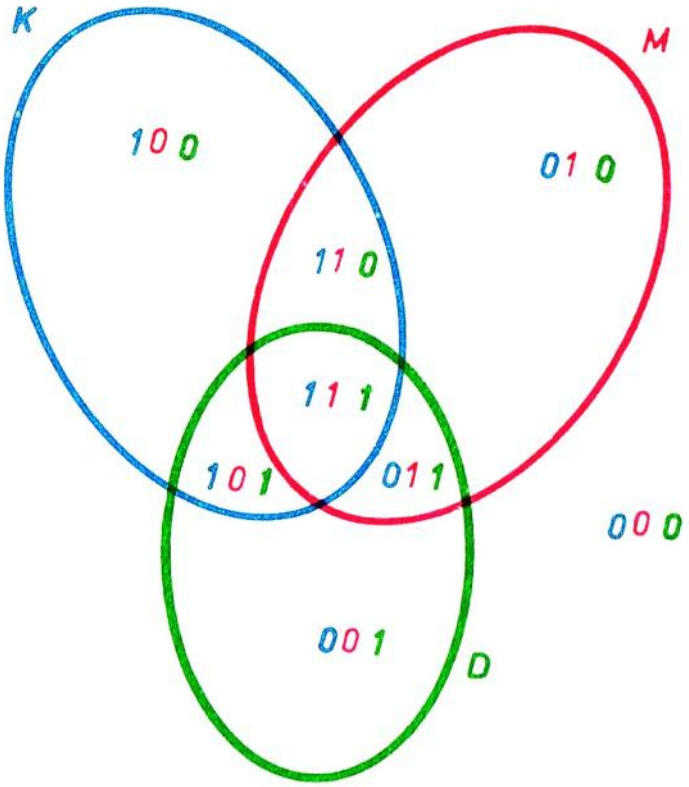
6.2

La representación de una inclusión «ya hecha» no nos permite, aquí, seguir todos los mecanismos de la «deducción».
Los veremos aparecer claramente con nuestros enigmáticos conjuntos:

K = los katablepos
M = los manusinos
D = los dariñenos

de los que se nos dice:
los katablepos son manusinos,
los manusinos son dariñenos.

Representaremos tres conjuntos cualquiera, con el ideograma [1]:



Esta vez, para caracterizar las regiones, ha sido preciso formular tres preguntas:

1) ¿Es un katablepo el objeto? sí o no

2) ¿Es un manusino el objeto? sí o no

3) ¿Es un dariñeno el objeto? sí o no

Las respuestas forman una sucesión de «sí» y de «no», o también una sucesión de «1» (representando «sí») y de «0» (representando «no») [2].

---

(1) Este ideograma se llama «hoja de trébol».

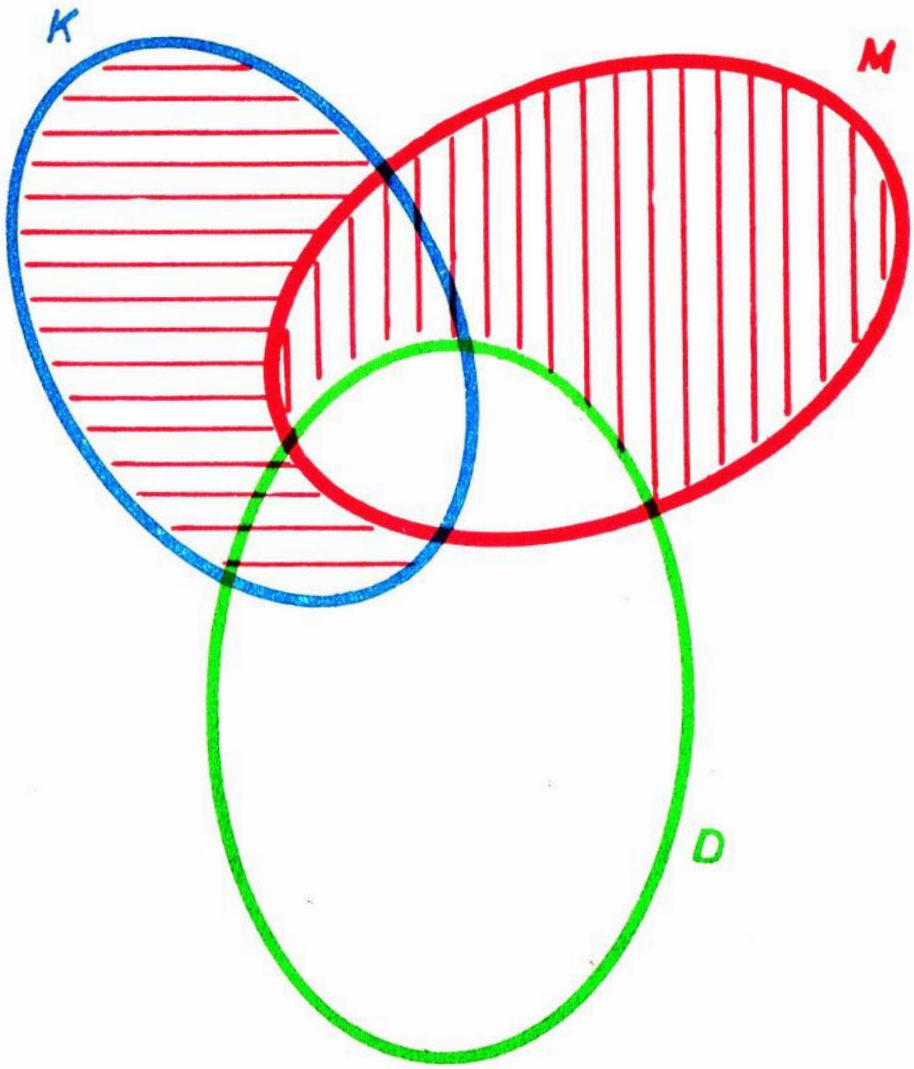
(2) En lugar de los signos 1,0, se hubiera podido emplear cualquier otro sistema binario de escritura △ □ o × O etc.

1 y 0 no significan más que «sí» y «no» y de ningún modo uno y cero.

Trasladamos nuestras informaciones a un ideograma de Venn:

$K \subset M$ es decir $K \setminus M = \varnothing$ (rayado $\equiv$)

$M \subset D$ es decir $M \setminus D = \varnothing$ (rayado $|||$)



Se deduce rápidamente que $K \setminus D = \varnothing$
es decir, que $K \subset D$
es decir, que: «los katablepos son dariñenos».

6.3

Con esto:

Si	$A \subset B$ y $B \subset D$	entonces	$A \subset D$

Esta propiedad se enuncia:

La inclusión entre conjuntos es una relación transitiva.

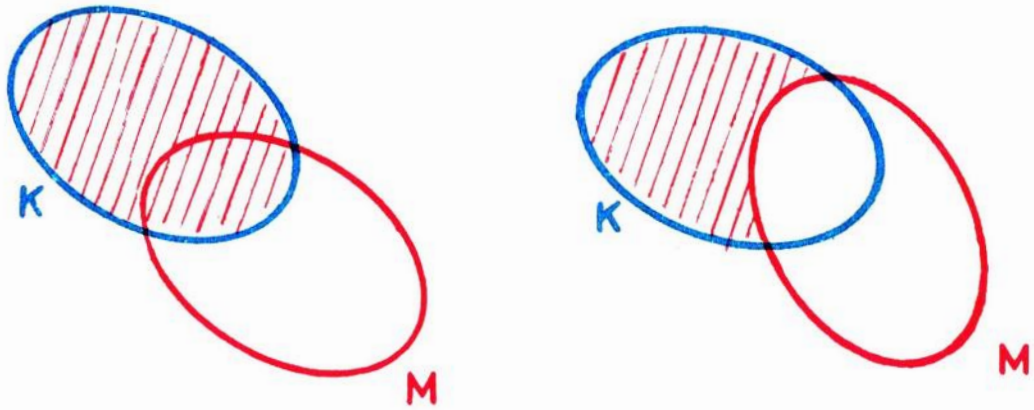
7. Inclusión del vacío

7.1

Volvemos a los katablepos y a los manusinos.

Se nos dice:
no hay katablepos
$K = \varnothing$

Se nos dice:
los katablepos son manusinos
$K \setminus M = \varnothing$



Evidentemente, si $K = \varnothing$, a fortiori $K \setminus M = \varnothing$.
El conjunto vacío está necesariamente contenido en todo conjunto.
Se tiene, pues:

$\varnothing \subset A$ cualquiera que sea A

7.2

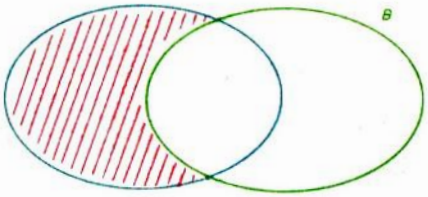
Esto conduce a resultados sorprendentes cuando se expresan en lenguaje corriente. Por ejemplo:
los habitantes del sol son matemáticos;
los triángulos cuadrados son batracios;
los elefantes con aletas son comisarios de policía;
etc...
¡Y todos estos enunciados son verdaderos!
Nuestra admiración proviene de la contradicción entre:
el artículo plural, que parece decirnos que existen elementos (al menos dos) en el conjunto sujeto;
la incompatibilidad de la caracterización (triángulo «cuadrado», elefante con «aletas»).

8. Negación de la inclusión

8.1

Sabemos que:

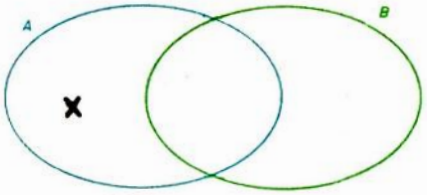
$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \varnothing)$



La negación de $A \setminus B = \varnothing$ (A menos B es vacío)
es $A \setminus B \neq \varnothing$ (A menos B no es vacío)

De donde

$(A \not\subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B \neq \varnothing)$



8.2

En el lenguaje usual:
«Es falso que todos los katablepos sean manusinos»
es equivalente a
«Hay al menos un katablepo que no es manusino»
«es falso que los animales acuáticos sean peces»
es equivalente a
«hay animales acuáticos (uno al menos) que no son peces» (p. ej., las ballenas).

8.3

Aquí se nos manifiesta el peligro del lenguaje usual: los enunciados en forma afirmativa o negativa

«los a son b»
«los a no son b»

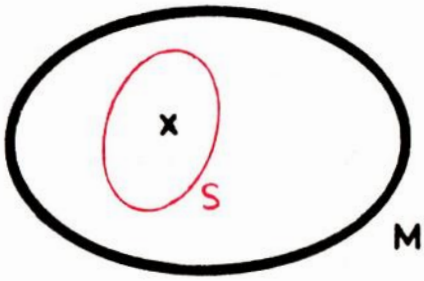
no nos proporcionan cada uno la negación del otro.

enunciado	negación
los a son b	un a al menos no es b
los a no son b	un a al menos es b

Tendremos cuidado para no confundir:
la forma negativa de un enunciado,
la negación de un enunciado.

8.4

Si aplicamos esta transformación a un singleton, la forma negativa es también la negación de la forma afirmativa.
«Sócrates es mortal» tiene por negación «Sócrates no es mortal».



8.5

En conclusión:

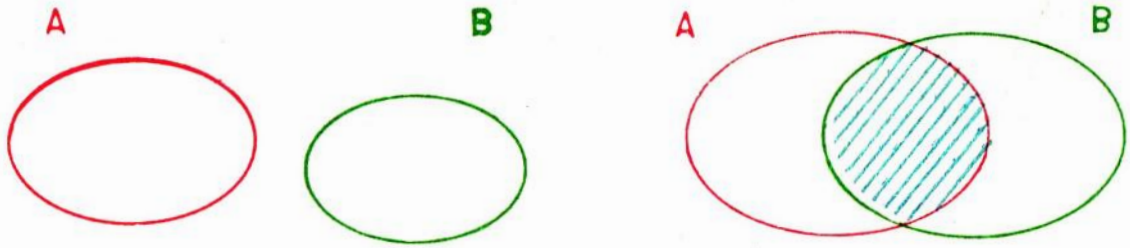
«los a no son b» no es la negación de «los a son b».
«A (singleton) no es b» es la negación de «A (singleton) es b».
La lengua usual nos aparece una vez más como un instrumento muy difícil de manejar si se quieren respetar las reglas rigurosas de la lógica.

9. La disyunción y la imbricación

9.1

Un enunciado en forma negativa «los a no son b» — por ejemplo: «los niños del Buen Dios no son patos salvajes» nos proporciona inmediatamente los ideogramas:

(Euler) (Venn)



Decimos en este caso que los **conjuntos A y B son disyuntivos,** o también que

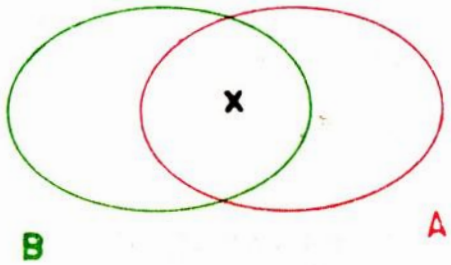
A no se imbrica en B,

y lo escribimos

$$A \not\asymp B$$

9.2

Este enunciado posee, también, su negación:
"«los a no son b» es falso"
es equivalente a
un a, al menos, es b.
Que nos proporciona el ideograma:



Se dirá en este caso
los conjuntos A y B no son disyuntivos
o también
A imbrica a B [1]
que se escribe $A \asymp B$.

(1) El verbo «imbricar», al igual que su signo, se utilizan con poca frecuencia en los manuales. Esto es deplorable porque el signo simplifica considerablemente la escritura.

9.3

Esto nos proporciona una escritura que expresa la realidad de un conjunto.

$(A \neq \varnothing) \Leftrightarrow$ A es real $\Leftrightarrow$ $A \mathrm{I} A$

$(A = \varnothing) \Leftrightarrow$ A es vacío $\Leftrightarrow$ $A \not\mathrm{I} A$

10. Conjunto de las partes

10.1

Sea el conjunto $E = \{ a, b, c, d \}$

Podemos formar todos los subconjuntos de E, sin olvidarnos ni de la parte $\varnothing$, ni del mismo conjunto E.

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \ldots, \{a, b\}, \{a, c\}, \ldots \{a, b, c, d\}$

Cada uno de los conjuntos formados de esta manera se puede considerar, a su vez, como elemento de un nuevo conjunto. Formemos el conjunto de todos estos subconjuntos:

$$\mathcal{P}(E) = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} \}$$

Es el **conjunto de las partes de E.**
Contiene siempre a $\varnothing$ y a E

$$\mathcal{P}(E) = \{ X \mid X \subset E \}$$

El conjunto de las partes de E es el conjunto de todos los conjuntos contenidos en E.

10.2

Conjunto de las partes de un singleton:

$$E = \{ a \}$$
$$\mathcal{P}(E) = \{ \varnothing, E \}$$

Conjunto de las partes del conjunto vacío:

$$E = \varnothing = \{ \}$$
$$\mathcal{P}(E) = \{ \varnothing, E \} = \{ \varnothing, \varnothing \} = \{ \varnothing \}$$
$$\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)] = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$$

10.3

En la construcción (10.1) hemos comprobado que el conjunto de las partes de

$$E = \{ a, b, c, d \}$$

contiene dieciséis elementos.
¿Cuántas partes se pueden formar con un conjunto de n elementos?
Veamos un procedimiento más cómodo para la formación de un subconjunto:
construimos una «tabla» colocando cada elemento como «cabecera de columna»;
convenimos en indicar por + o −, o por 1 o 0, o por cualquier otro par de signos, el hecho de que un elemento pertenece o no pertenece al conjunto.
Por ejemplo, para cuatro elementos:

a	b	c	d	conjunto formado
0	0	0	0	$\varnothing$
0	0	0	1	$\{d\}$
0	0	1	0	$\{c\}$
0	0	1	1	$\{c, d\}$
0	1	0	0	$\{b\}$
0	1	0	1	$\{b, d\}$
0	1	1	0	$\{b, c\}$
0	1	1	1	$\{b, c, d\}$
1	0	0	0	$\{a\}$
1	0	0	1	$\{a, d\}$
1	0	1	0	$\{a, c\}$
1	0	1	1	$\{a, c, d\}$
1	1	0	0	$\{a, b\}$
1	1	0	1	$\{a, b, d\}$
1	1	1	0	$\{a, b, c\}$
1	1	1	1	$\{a, b, c, d\}$

Una serie de 4 signos 1 o 0 proporciona la escritura de la parte formada. ¿Cuántas escrituras binarias diferentes se pueden formar con n casos?
Hay dos posibilidades de escritura para cada caso.
Hay $2 \times 2 = 2^2$ posibilidades de escritura para dos casos.
Hay $2 \times 2^2 = 2^3$ posibilidades de escritura para tres casos.
etc...
Hay 2^n posibilidades para n casos.

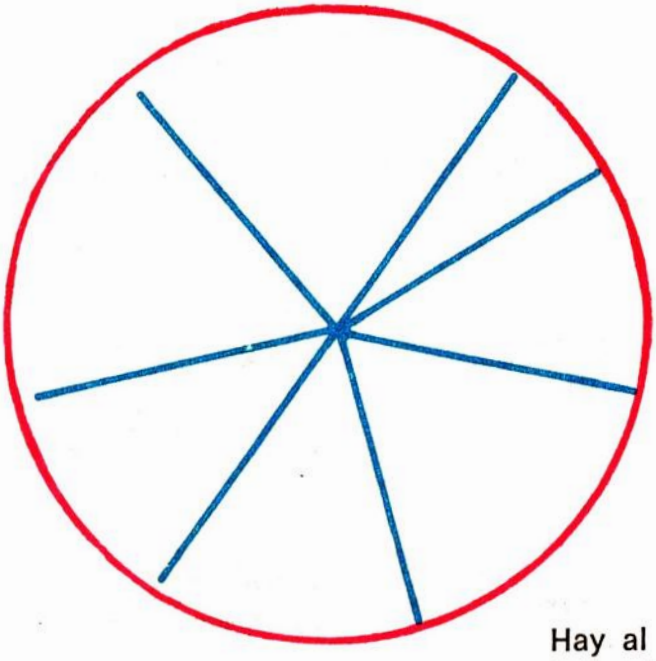
Un conjunto que contiene n elementos proporciona 2^n partes.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

11. Partición de un conjunto

11.1

La acción de «partir» nos lleva a la noción de **partición.**
Para partir una tarta, la cortamos en varios trozos.



Hay al menos dos trozos;
todos los trozos existen;
dos trozos no se imbrican,
el uno sobre el otro;
la reunión de los trozos reconstruye la tarta.

Basta con trasladar esto a nuestro nuevo lenguaje para definir una partición.
La partición de un conjunto E es un conjunto de subconjuntos de E.
En toda partición:
Hay al menos dos subconjuntos;
ningún subconjunto es vacío;
todo elemento del conjunto pertenece a uno y sólo a uno de los subconjuntos.

Ejemplo: $E = \{a, b, c, d, e\}$

$\{\{a, b\}, \{c, e\}, \{d\}\}$ es una partición de E

$\{\{a, d, c\}, \{b, e\}\}$ es una partición de E

$\{\{b, c, d, e\}, \{a\}\}$ es una partición de E

$\{\{c\}, \{a\}, \{e\}, \{d\}, \{b\}\}$ es una partición de E.

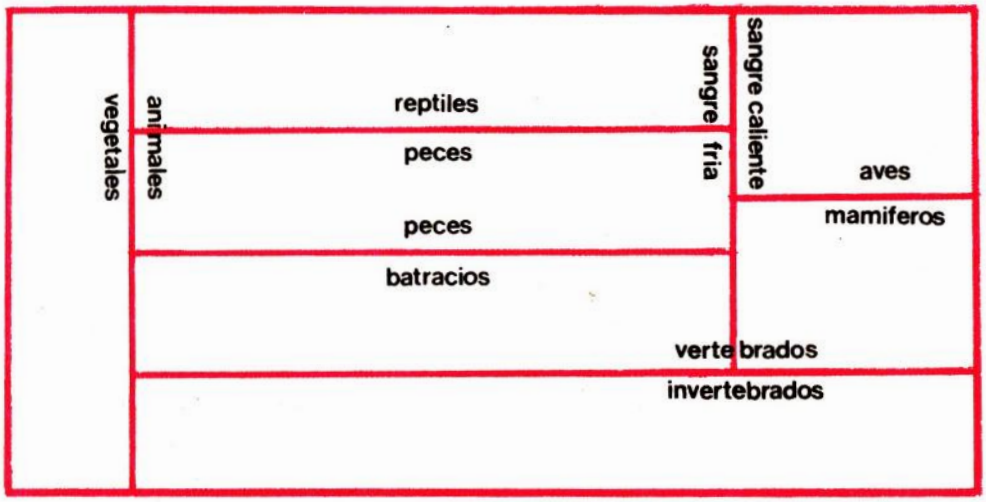
Toda partición de un conjunto está contenida en el conjunto de sus partes.

La partición que contiene más elementos es la partición en *singletons*. La llamaremos «partición maximal».

11.2

Ejemplo:

Veamos una partición (simplificada) que resulta cómoda para la clasificación de los seres vivos:



12. Partición de los triángulos del plano [1]

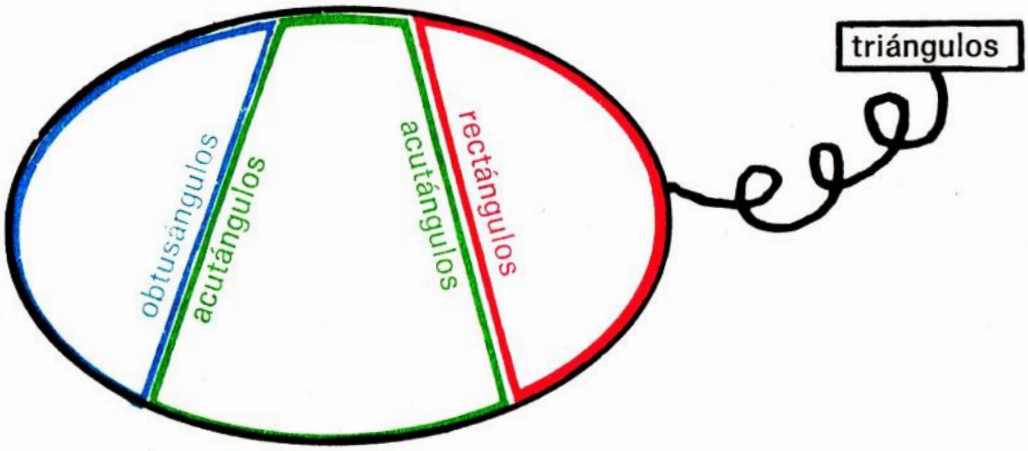
12.1

Imaginemos el conjunto de todos los triángulos del plano.

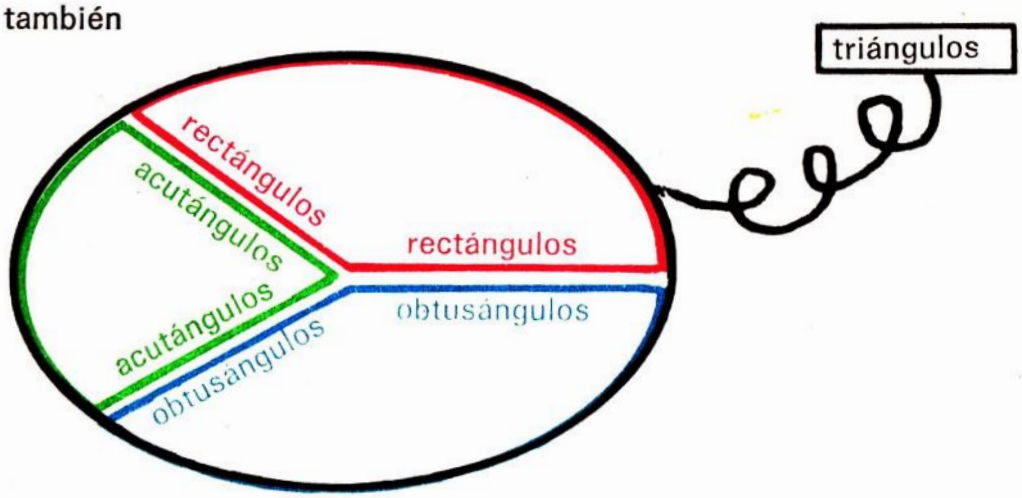
(1) Lo que sigue, en este capítulo dedicado a la inclusión, está puesto para facilitar su mejor comprensión.
Hemos elegido algunos ejemplos, pero se podrían haber puesto otros; por tanto, esto no es fundamental.

Podemos efectuar una partición de este conjunto en:
triángulos acutángulos (todos los ángulos son agudos)
triángulos rectángulos (un ángulo es recto)
triángulos obtusángulos (un ángulo es obtuso).

Efectivamente, es una partición, ya que:
ningún triángulo es a la vez acutángulo y rectángulo
acutángulo y obtusángulo
rectángulo y obtusángulo
todo triángulo es necesariamente acutángulo, rectángulo u obtusángulo.
Existen triángulos acutángulos
rectángulos
obtusángulos.
Podemos representar esta partición de diversas formas:



o también



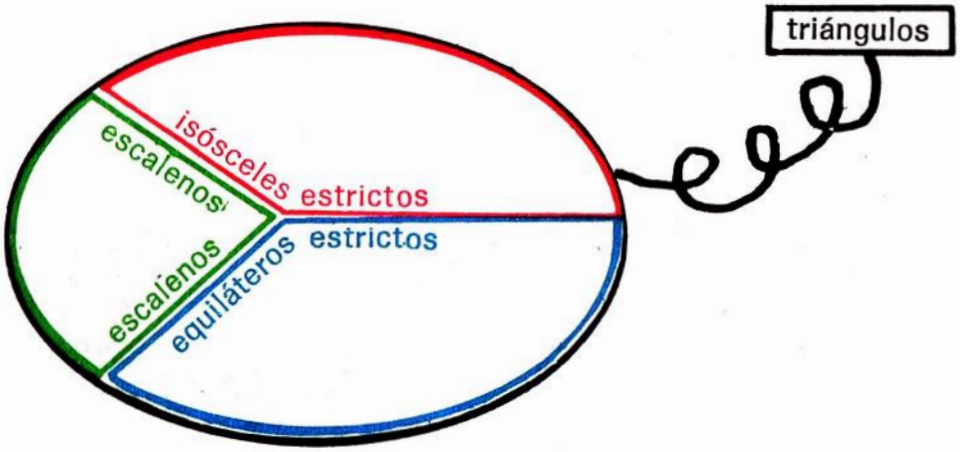
12.2

Podemos efectuar otra partición siguiendo otros criterios.

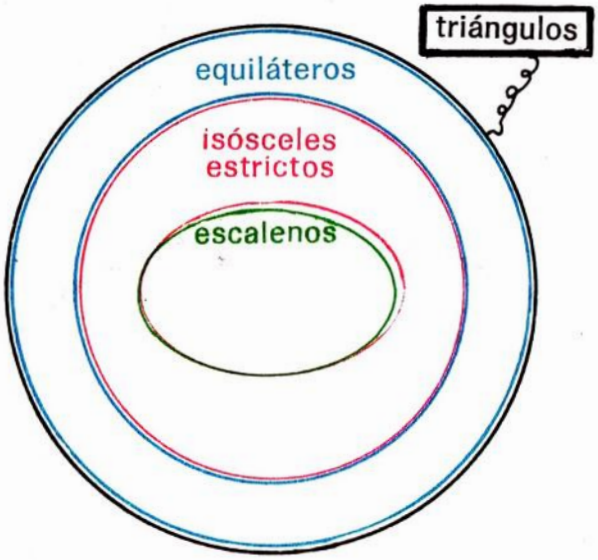
Por ejemplo:

los triángulos escalenos	(que no tienen dos ángulos iguales) (1)
los triángulos estrictamente isósceles (2)	(que tienen dos y sólo dos ángulos iguales) (3)
los triángulos equiláteros	(que tienen los tres ángulos iguales).

Esta partición puede ser representada de diversas maneras:



o también



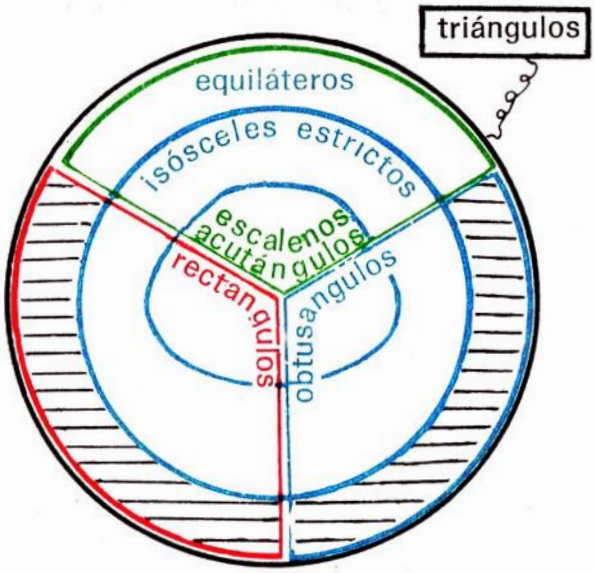
(1) Se demostrará sin dificultad que efectivamente se trata de una partición.

(2) Los triángulos isósceles (en sentido amplio) tienen al menos dos ángulos iguales; los triángulos equiláteros son pues isósceles.

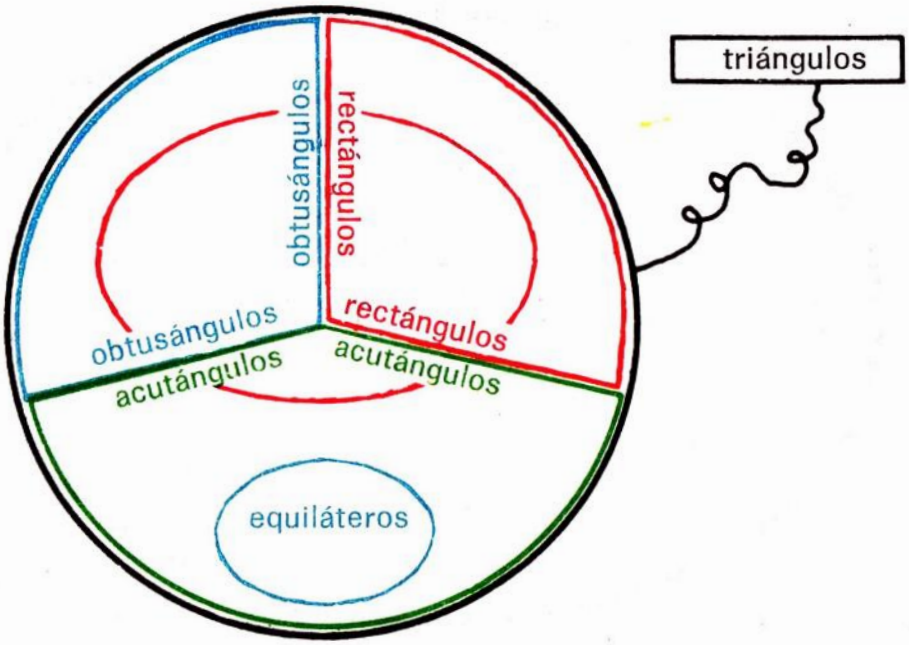
(3) Etimológicamente «isósceles» significa «lados iguales»; pero en un triángulo es equivalente considerar la igualdad de los ángulos o la de los lados.

12.3

Para comprender mejor estas dos particiones, se puede imaginar una tercera conteniendo nueve subconjuntos.
Una superposición adecuada de los dos ideogramas representa la partición resultante.



Algunos de los subconjuntos que aparecen son vacíos. Se puede, pues, rayar la parte correspondiente.
Así, no hay triángulos equiláteros obtusángulos
triángulos equiláteros rectángulos,



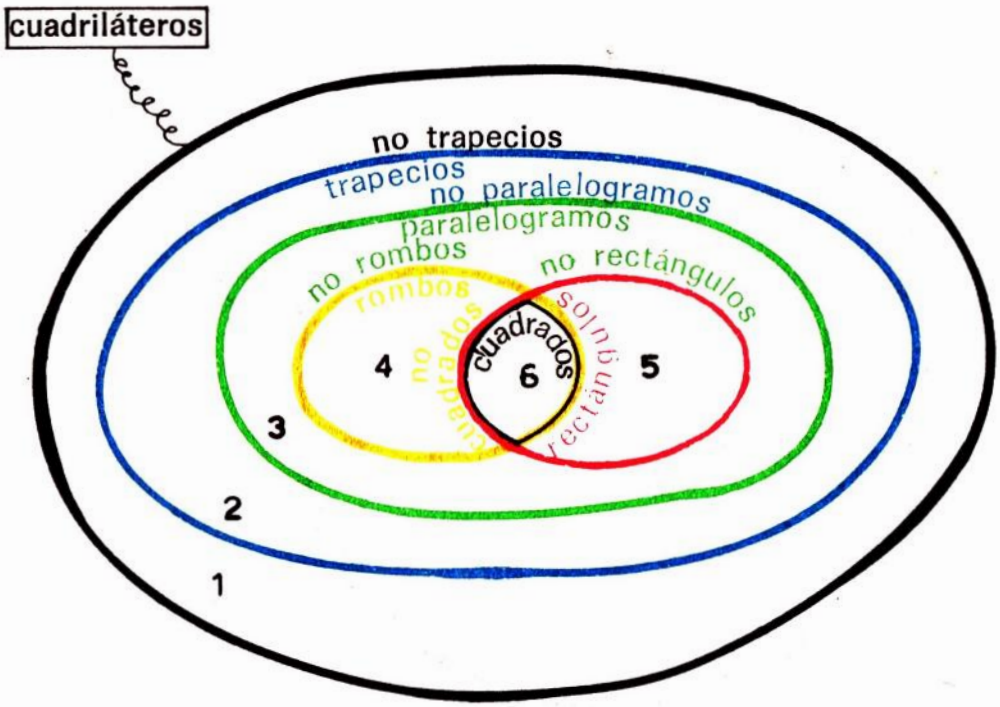
los triángulos equiláteros $\subset$ los triángulos isósceles acutángulos.
El ideograma puede, pues, simplificarse en su representación, que, finalmente, queda convertida en una partición con **siete** subconjuntos.

13. Partición de los cuadriláteros del plano

13.1

Podemos efectuar una partición en el conjunto de los cuadriláteros convexos.
Se clasifica frecuentemente a los cuadriláteros según los siguientes criterios:

trapecios	que tienen dos lados paralelos,
no trapecios	que no tienen dos lados paralelos,
paralelogramos	que tienen dos pares de lados paralelos,
no paralelogramos	que no tienen dos pares de lados paralelos,
rombos	que tienen los cuatro lados iguales,
no rombos	que no tienen los cuatro lados iguales,
rectángulos	que tienen los cuatro ángulos rectos,
no rectángulos	que no tienen los cuatro ángulos rectos,
cuadrados	que tienen los cuatro lados y los cuatro ángulos iguales,
no cuadrados	que no tienen los cuatro lados o los cuatro ángulos iguales.



Esto nos proporciona una partición en seis subconjuntos:
1) los cuadriláteros no trapecios,
2) los cuadriláteros trapecios no paralelogramos (trapecios estrictos),
3) paralelogramos que no son ni rombos ni rectángulos (paralelogramos estrictos),
4) los rombos que no son rectángulos (rombos estrictos),
5) los rectángulos que no son rombos (rectángulos estrictos),
6) los cuadrados (rombos rectángulos).

13.2

Vemos aparecer un verdadero ajuste conceptual; y se pone en evidencia un grave error pedagógico frecuentemente cometido, sobre todo, en la enseñanza primaria.

Se confunden, a veces:

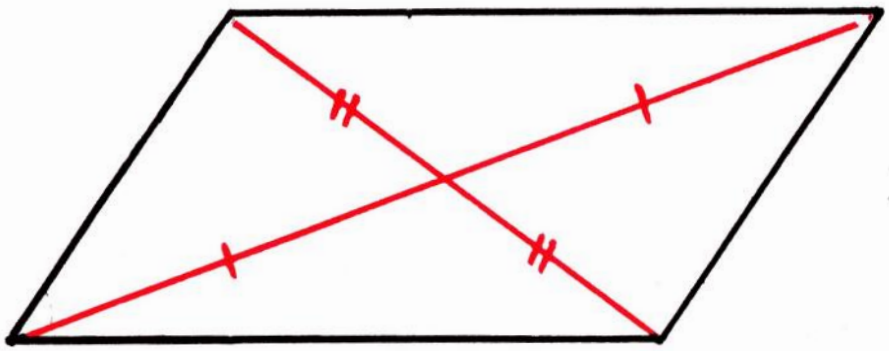
trapecio	y	trapecio estricto,
paralelogramo	y	paralelogramo estricto,
rectángulo	y	rectángulo estricto,
rombo	y	rombo estricto.

Desde luego, no se pone de manifiesto la inclusión de conjuntos (es decir, el afinamiento de conceptos). Por ejemplo, propiedades válidas para el paralelogramo no aparecen como válidas para el rectángulo; las propiedades del rectángulo no son aplicadas al cuadrado, y así sucesivamente. Se descuidaba, pues, este principio fundamental del método deductivo:

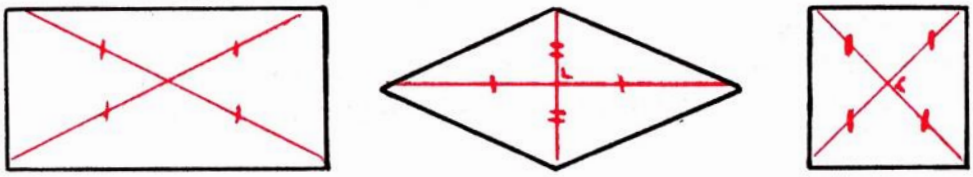
Toda propiedad válida para los elementos de un conjunto es válida también para los elementos de cualquiera de los subconjuntos.

Por ejemplo:

1) Las diagonales de un paralelogramo se cortan en un punto medio:

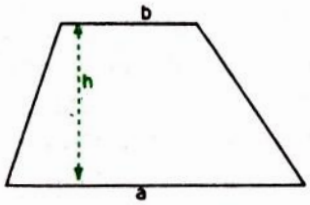


la cumplirá también el rombo, el rectángulo y el cuadrado.



2) Las diagonales de un rectángulo son iguales; en particular para el cuadrado.
3) Las diagonales de un rombo son perpendiculares; en particular para el cuadrado.
4) El área de un trapecio viene dada por la expresión:

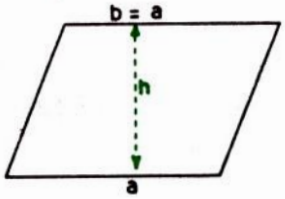
$S = 1/2\, h(a + b)$.



Para el paralelogramo:

$a = b$

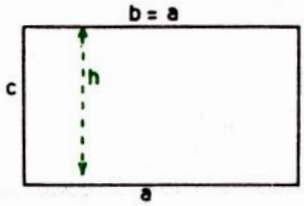
$S = 1/2\, h(a + b)$.



Para el rectángulo:

$h = c$

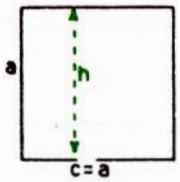
$S = ha$
$= ac$.



Para el cuadrado:

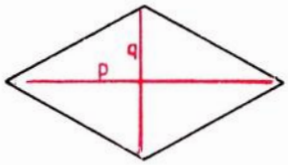
$c = a$

$S = ac$
$= a^2.$



5) El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales:

$S = 1/2\ pq.$



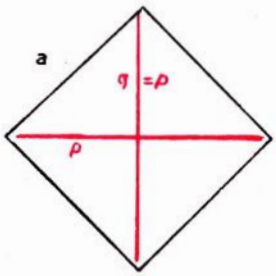
Para el cuadrado:

$p = q = a\sqrt{2}$

$S = pq/2$

$= p^2/2$

$= a^2.$

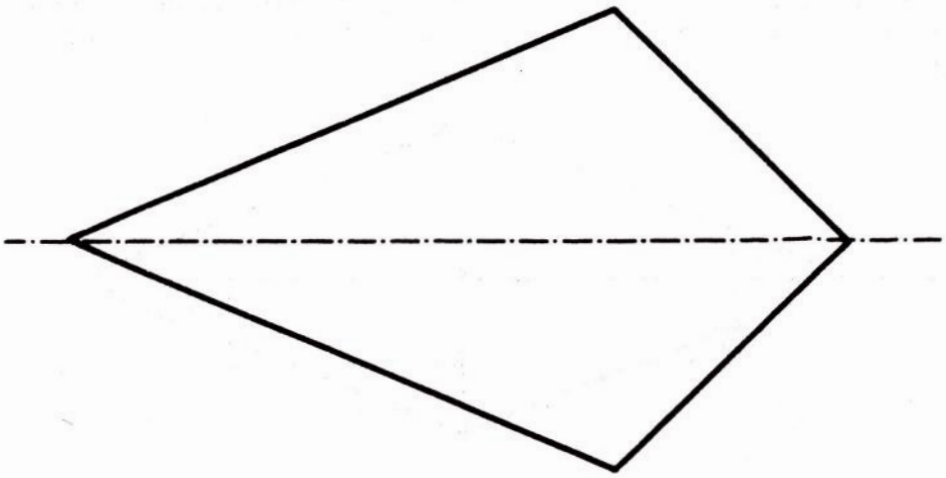


13.3

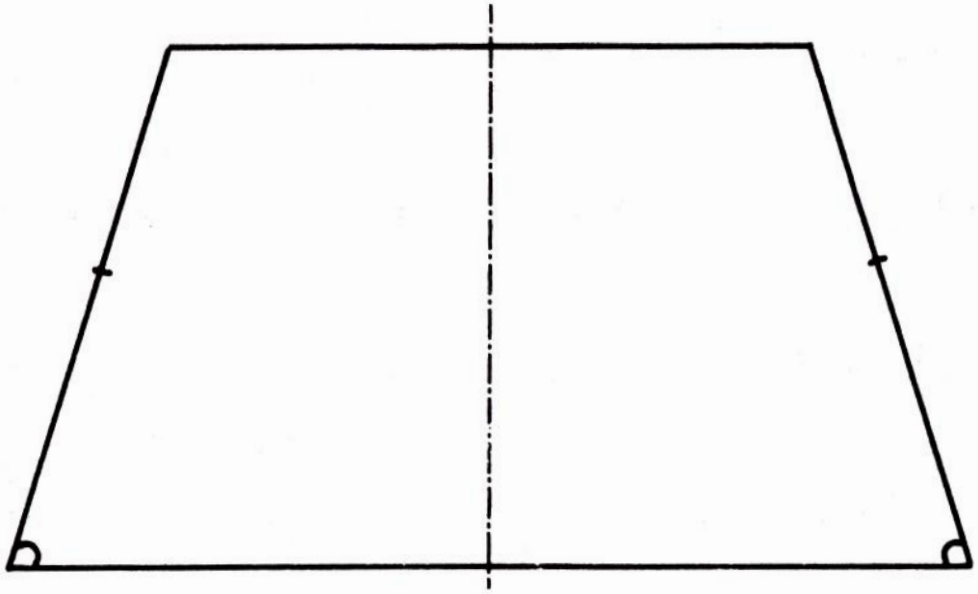
Se puede obtener otra partición de los cuadriláteros convexos utilizando otros criterios.

Por ejemplo:

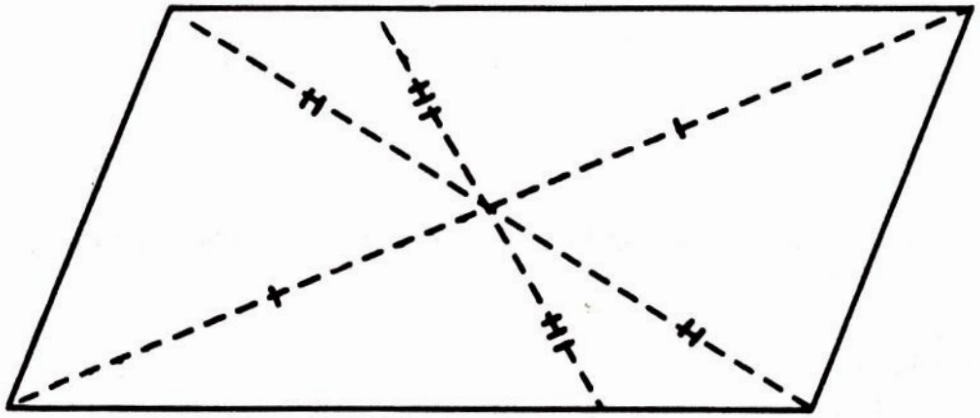
Rombos (o cometas): que tienen un eje diagonal de simetría.



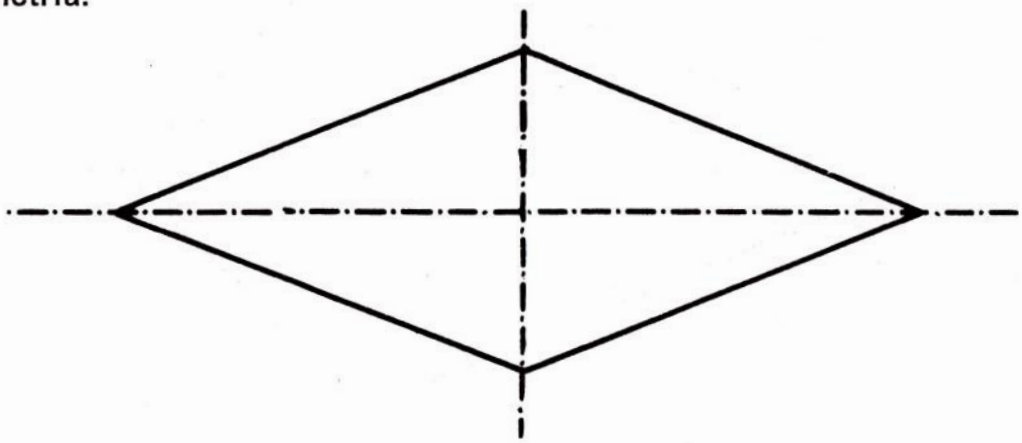
Trapecios isósceles: que tienen un eje de simetría que es mediatriz de ambas bases.



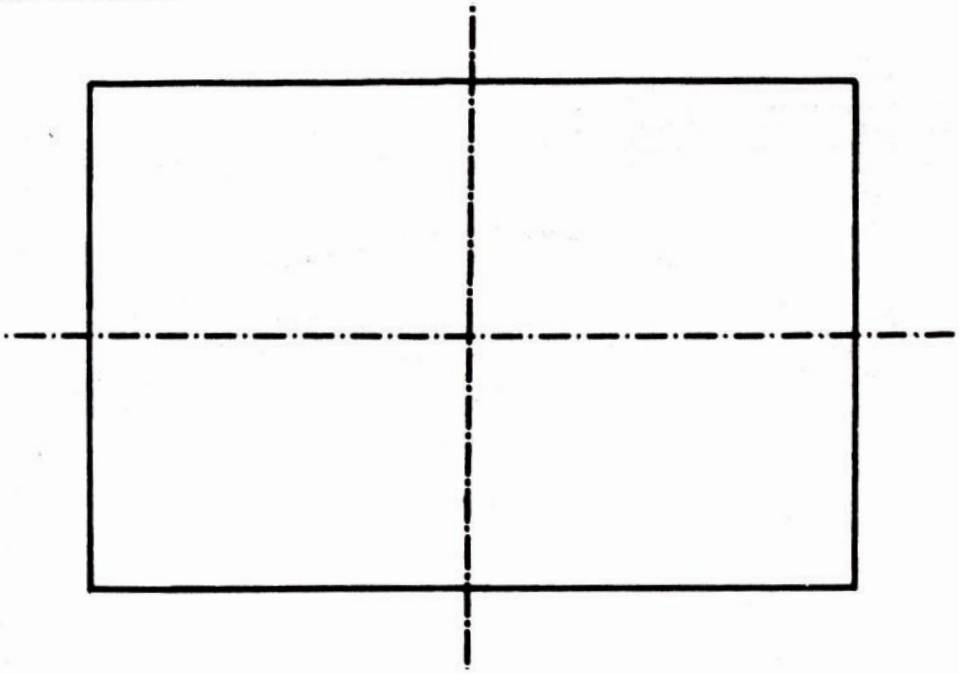
Paralelogramos: que tienen un centro de simetría.



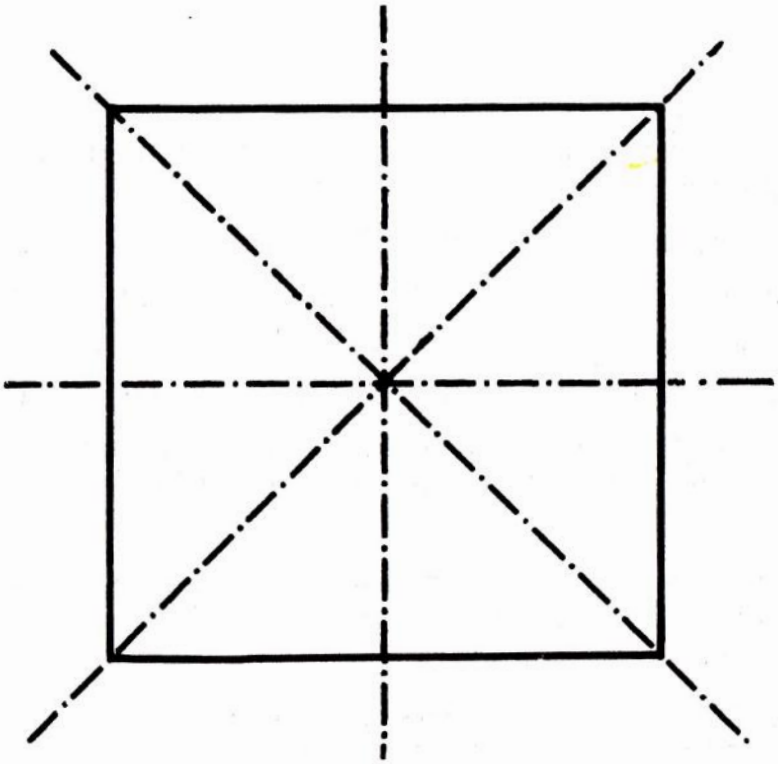
Los rombos losanjes son rombos paralelogramos y tienen dos ejes (diagonales) de simetría (perpendiculares) así como un centro de simetría.



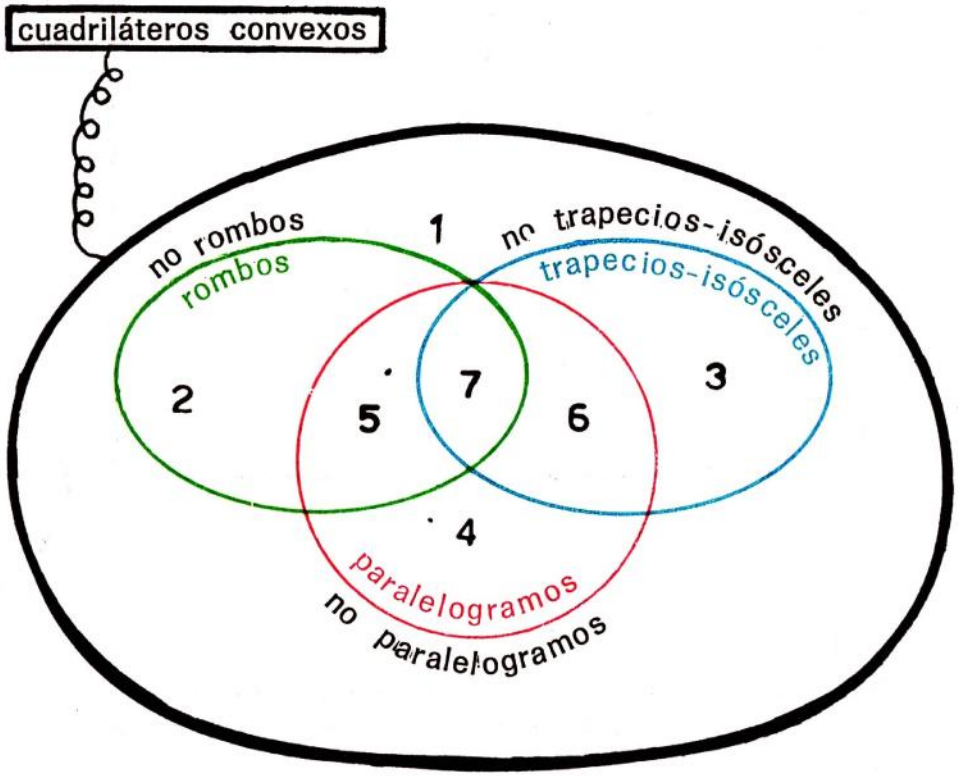
Los rectángulos son trapecios isósceles paralelogramos; tienen dos ejes (mediatrices) de simetría (perpendiculares), así como un centro de simetría.



Los cuadrados son rombos trapecios isósceles; tienen dos ejes (diagonales) y dos ejes (mediatrices) de simetría, así como un centro de simetría.



La partición proporciona **siete** subconjuntos:



1) Los cuadriláteros que no son ni trapecios isósceles, ni rombos, ni paralelogramos.

2) Los estrictos (que no son paralelogramos).

3) Los trapecios isósceles estrictos (que no son paralelogramos).

4) Los paralelogramos estrictos (que no son ni rombos, ni trapecios isósceles, es decir, que no son rombos ni rectángulos).

5) Los rombos estrictos (es decir, los rombos paralelogramos que no son trapecios isósceles; o también los rombos que no son rectángulos)

6) Los rectángulos estrictos (es decir, los trapecios isósceles paralelogramos que no son rombos; o también los rectángulos que no son rombos).

7) Los cuadrados (es decir, rectángulos rombos; es decir, los rombos trapecios isósceles).

14. Aplicación lingüística: la caracterización

14.1

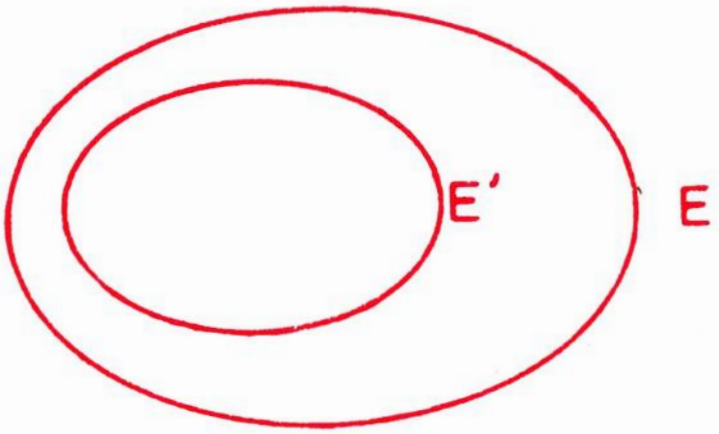
Consideremos el conjunto de todos los gatos del reino animal:

E = gatos.

Caracterizar este conjunto es formar un subconjunto por un procedimiento lingüístico (1).

Por ejemplo:

E′ = gatos pardos
y evidentemente $E' \subset E$
los gatos pardos son gatos.



14.2

Vemos aparecer simultáneamente diferentes **formas** lingüísticas que desempeñan la misma función de caracterización:

los gatos pardos (adjetivo)
los gatos de la madre de Miguel (complemento del nombre)
los gatos que recuerdo (relativo)
los gatos alimentados por el municipio (participio)
los gatos para vender (infinitivo preposicional)

La enseñanza tradicional de la gramática se preocupa más de la forma que de la función. Hemos dado **cinco** formas diferentes que desempeñan la misma función: caracterización del núcleo «gato». La enseñanza de la gramática debería analizar las estructuras manifestadas más allá de las formas.

---

(1) Algunos dicen «determinar», pero la palabra se presta a confusión porque es utilizada, tanto en el sentido de caracterizar como en el de cuantificar.

14.3

Si caracterizamos el conjunto inicial sin modificarlo, expresamos una forma **redundante.**

Por ejemplo:

los gatos felinos (= los gatos),
los gatos mamíferos (= los gatos).

Si el subconjunto es igual al conjunto, la caracterización es redundante (1).

14.4

Si caracterizamos un conjunto de manera que formamos teóricamente un conjunto vacío, creamos una **metáfora.**

Ejemplo: los gatos triangulares.

Sabemos que los gatos no son triángulos. Entonces, a priori, el conjunto formado es vacío.

los gatos triangulares = Ø (según las leyes de la zoología y de las matemáticas).

Pero cada vez que nos encontramos con un signo, reaccionamos para buscarle una significación. Nos repugna asignarle el vacío, este conjunto único siempre parecido a sí mismo, y con contenidos tan variados como:

los gatos triangulares,
las gallinas de los huevos de oro,
los elefantes con aletas,
las libélulas a reacción,
etc...

Modifiquemos entonces el sentido de las palabras para asociarle un epíteto compatible con el núcleo.

Por ejemplo, «los gatos triangulares» serán en nuestra imaginación «los gatos con la cabeza triangular», o también cualquier otra cosa según nuestro humor y nuestra inspiración.

14.5

Cuando digo «los gatos pardos», es el conjunto «los gatos» al que caracterizo por la propiedad «pardo», y no lo contrario.

De aquí las categorías gramaticales: sustantivo/adjetivo;

la imposibilidad de permutar: los gatos pardos (y no «los pardos gatos»), los cambios de significado: un pequeño hombre ≠ un hombre pequeño.

---

(1) Esto no significa que la caracterización se deba rechazar.
Ejemplo: «... y su boca febril y de "azur azul" voraz...» (Mallarmé).

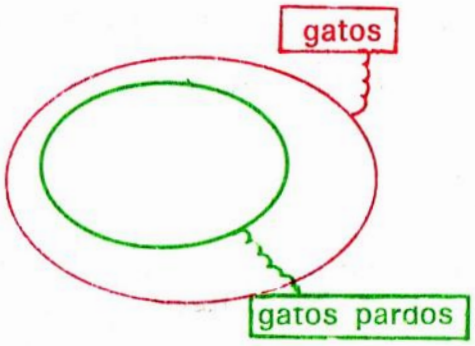
15. Aplicación lingüística: el predicado

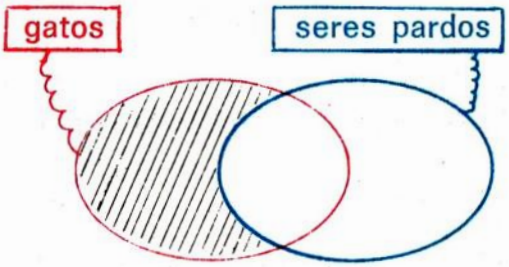
«De noche, todos los gatos son pardos.»
¿Qué expresa en la teoría de los conjuntos este proverbio? Evidentemente, incluyendo el conjunto de los gatos en el conjunto de los seres pardos:

los gatos $\subset$ los seres pardos.

Y encontramos la diferencia fundamental entre el **predicado** y la **caracterización.**

caracterización	**predicado**
los gatos pardos	los gatos son pardos





Operación lingüística de formación de un subconjunto.	Enunciado de inclusión de un conjunto en otro conjunto: los gatos $\subset$ los seres pardos.
Puede proporcionar: el conjunto inicial (redundancia); un subconjunto estricto; el conjunto vacío.	Puede proporcionar: un enunciado verdadero; un enunciado falso.
«Las gallinas ovíparas» es una caracterización redundante; «las gallinas de los huevos de oro» es una caracterización metafórica (teóricamente «vacía»)	«Las gallinas son ovíparas» es un enunciado verdadero»; «las gallinas ponen huevos de oro», es un enunciado falso.

16. Aplicación lingüística: los artículos

16.1

La lengua, en el empleo de los artículos, se refiere al conjunto de las partes del universo del discurso (1).
Consideremos un conjunto de alumnos y tomemos 4 para facilitar la explicación:

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Si, hablando, digo «los alumnos», me refiero a E en su totalidad.

$$\text{los alumnos} = \{a, b, c, d\}$$

Si digo «unos alumnos», me refiero a una parte de E (conteniendo al menos dos alumnos),

$$\text{unos alumnos} \in \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

Si digo «un (y sólo uno) alumno», me refiero a una parte de E que contiene un (y sólo uno) alumno;

$$\text{un alumno} \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

Si digo «algunos alumnos», me refiero a una parte estricta de E que contiene al menos dos alumnos y no los contiene todos,

$$\text{algunos alumnos} \in \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

Si digo «ningún alumno» me refiero a la parte vacía de E
ningún alumno $= \varnothing$.
La diferencia «definido/indefinido» en la clasificación de los artículos corresponde, pues, a la diferencia:

totalidad de c.u./parte de c.u.

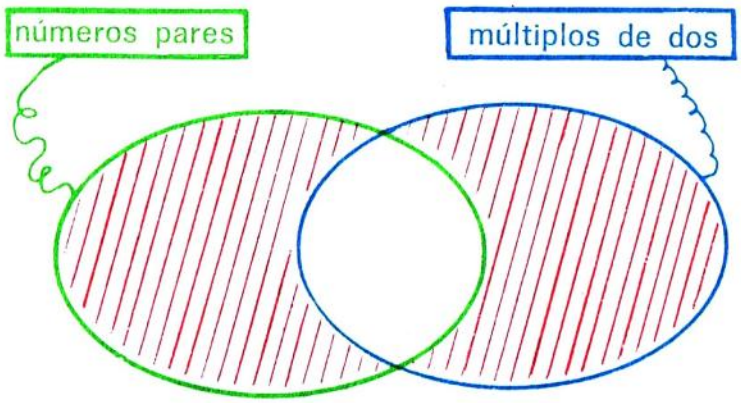
Señalemos una vez más cuán nefastos son los métodos de la enseñanza gramatical tradicional llevados según las estructuras de la lengua latina. Se llama «adjetivos indefinidos» a las palabras «algunos», «ninguno» que, con el mismo tratamiento que los artículos definidos o indefinidos, designan unos subconjuntos del universo del discurso. Por lo demás, hablando de «definido» y de «indefinido», no se relacionan nunca estas nociones con la enseñanza de las matemáticas.

---

(1) El universo del discurso es el conjunto, impuesto por la situación, inducido por el contexto, en el cual los interlocutores de una comunicación efectúan una separación o división.
Por ejemplo, si soy el director de un colegio y hablo con uno de mis profesores, la frase: «me han venido a ver tres alumnos» hace referencia, evidentemente, al conjunto de los discípulos de mi colegio.

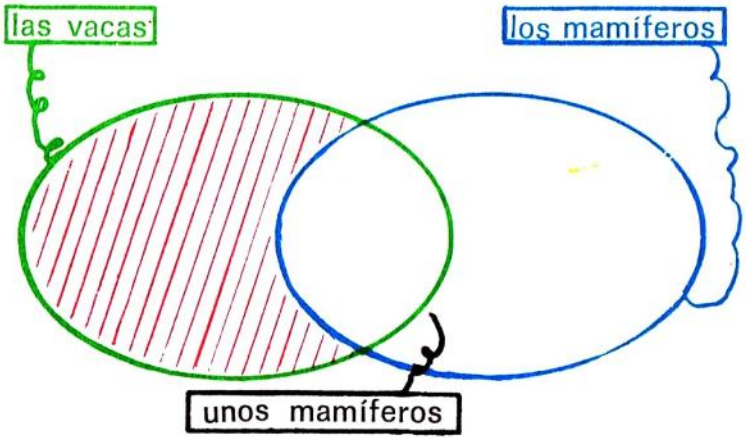
17. Aplicación lingüística: las acepciones de «ser»

Los diccionarios y gramáticas dicen que el verbo copulativo «ser» tiene diversas acepciones.
De hecho, la mayor parte de estas acepciones pueden resumirse en una sola: la expresión de la **igualdad** entre dos conjuntos.
Los números pares son **los** múltiplos de dos.
Se trata, efectivamente, de la igualdad de dos totalidades (artículos «los»... «los») y, por tanto, la igualdad de extensiones [1]



Las vacas son **unos** mamíferos.

Se trata de la igualdad entre una totalidad y una parte (artículos «los»... «unos») y, por tanto, la «inclusión» de la primera extensión en la segunda.

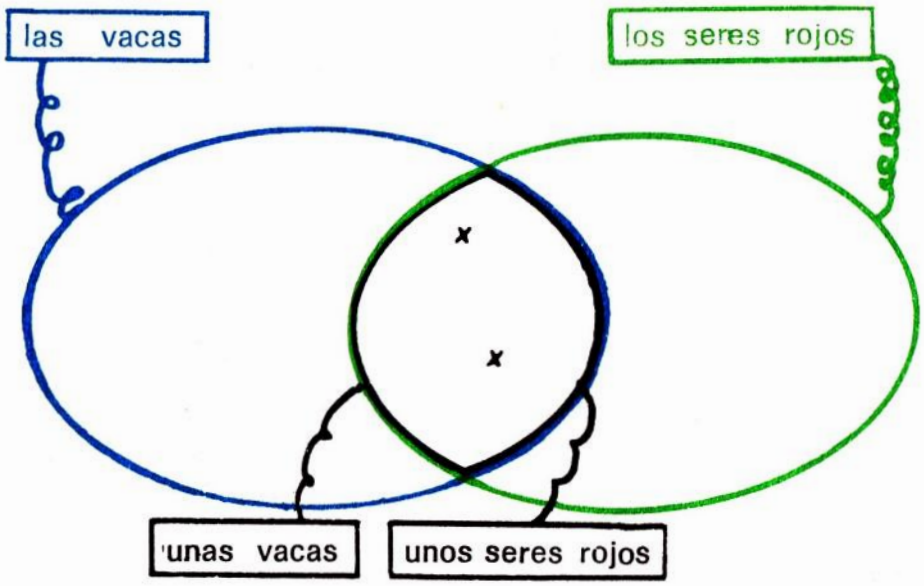


---

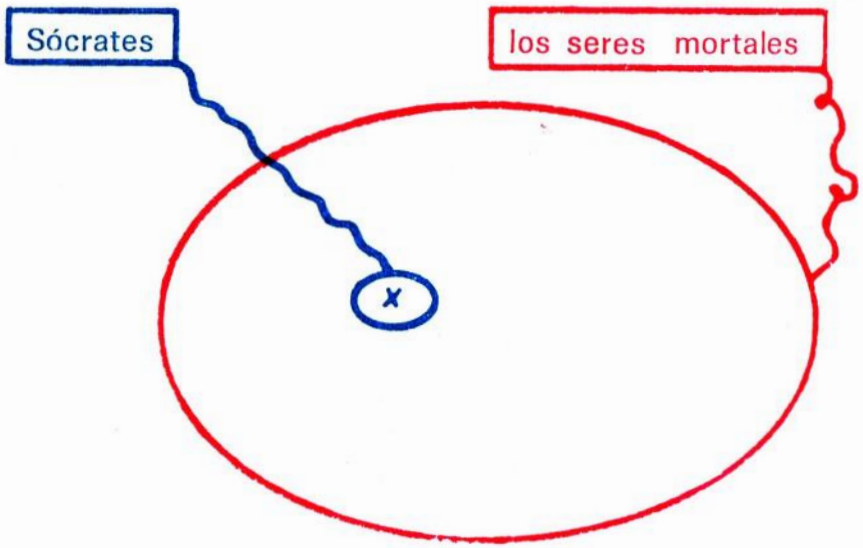
(1) Extensión de una propiedad: conjunto de todos los seres que poseen esta propiedad.
Ejemplos: hombre — la humanidad,
gato — todos los gatos del reino animal,
pardo — todo el que es pardo,
etc.

Unas vacas son rojas.

Se trata de la igualdad entre una parte real y una parte cualquiera (artículos «unos»... falta de artículo [1]). Por tanto, la **superposición** de dos extensiones:



Sócrates es mortal:



(1) La ausencia de artículo se expresa por «artículo señalando cero».

Se trata de la igualdad entre un singleton y una parte cualquiera (nombre propio... señalando cero). Por tanto, la inclusión de un singleton, es decir, la pertenencia del objeto a la extensión del atributo.

18. La deducción lógica

18.1

La dificultad de utilizar la lengua usual para un nivel abstracto había sido ya motivo de preocupación para los filósofos de la antigüedad. Para evitar confusiones, Aristóteles codificó en una «lógica» las reglas de transformación y de deducción del lenguaje. La lógica aristotélica ha proporcionado la base para la reflexión de la humanidad durante más de dos mil años.
Sin embargo, todavía se encontraba paralizada por falta de los recursos necesarios a un lenguaje usual mal analizado; no estaba exento de errores y, además, le faltaba una notación y un vocabulario adecuado.
Es a partir del siglo XIX cuando se ha tratado de ampliar la lógica aristotélica más allá de algunos silogismos elementales, creando un instrumento de trabajo lingüístico independiente del lenguaje usual.
La utilización de este nuevo instrumento se enseña a los niños en la matemática de hoy. En contraposición, la gramática que se enseña es todavía aristotélica.

18.2

Para vuestro deleite, veamos dos problemas «deductivos» debidos a Lewis Caroll (1); esto para probaros la dificultad de utilizar el lenguaje y la comodidad de nuestro formalismo.
«La historia del encuentro con la serpiente de mar me hace siempre bostezar; no bostezo nunca, salvo si hago alguna cosa desprovista de interés; ¿qué se concluye?»:

siendo: S las historias de los encuentros con la serpiente de mar,
B las historias que me hacen bostezar,
E las historias desprovistas de interés.

Tenemos que $S \subset B$ y $B = E$
por tanto, $S \subset E$.
Es decir: «La historia del encuentro con la serpiente de mar está totalmente desprovista de interés».

---

(1) Lewis Caroll: autor de *Alicia en el país de las maravillas*, best-seller de literatura infantil en los países anglosajones.
De hecho, lógico, matemático y humorista. En el «Juego de la lógica» (1886) advertía seriamente a su lector: «el juego requiere al menos un jugador»

He aquí a Alicia, la hija espiritual de Lewis Carroll.
En el país de las maravillas, cambia de altura con la misma facilidad que se respira.
A decir verdad, no se ha sabido nunca si era Alicia quien se achicaba y agrandaba, o era el país de las maravillas el que se agrandaba y achicaba.

18.3

Os informo que:
1) No hay más que gatos en mi casa;
2) Todo animal al que le interese contemplar la luna me interesa como animal doméstico;
3) Ningún animal es carnívoro a no ser que vagabundee por la noche;
4) Los gatos matan a los ratones;

5) Ningún animal me quiere, salvo los que viven en mi casa;
6) Los canguros no me interesan como animales domésticos;
7) Sólo los carnívoros matan a los ratones;
8) No quiero a los animales que no me quieren;
9) Los animales que vagabundean por la noche gustan de contemplar la luna.

¿Qué podéis deducir de mis relaciones afectivas con los canguros?

A el conjunto de los animales de mi casa;
B el conjunto de los gatos;
D el conjunto de los animales que gustan de contemplar la luna;
E el conjunto de los animales que me interesan como animales domésticos;
F el conjunto de los animales carnívoros;
G el conjunto de los animales que vagabundean por la noche;
H el conjunto de los animales que matan a los ratones;
I el conjunto de los animales que me quieren;
K el conjunto de los canguros;
L el conjunto de los animales a los que quiero.

Traducimos los datos

$A = B$; $D \subset E$; $G = F$, $B \subset H$; $I = A$; $K \not\subset E$; $F = H$; $L \subset I$; $G \subset D$

Podemos anotar estos mismos datos según el orden inclusivo:

$L \subset I = A = B \subset H = F = G \subset D \subset E \not\subset K$

Podemos deducir muchas relaciones de estos datos, pero en particular:

$L \not\subset K$ e $I \not\subset$

es decir:
¡¡¡yo no quiero a los canguros
y
los canguros no me quieren a mí!!!

No os enfadéis por haber seguido un camino tan largo para conocer mis relaciones afectivas con los canguros.
Se podrían haber puesto otras cuestiones más edificantes. Pero para abordarlas es preciso un bagaje matemático que no poseéis, al menos por ahora.

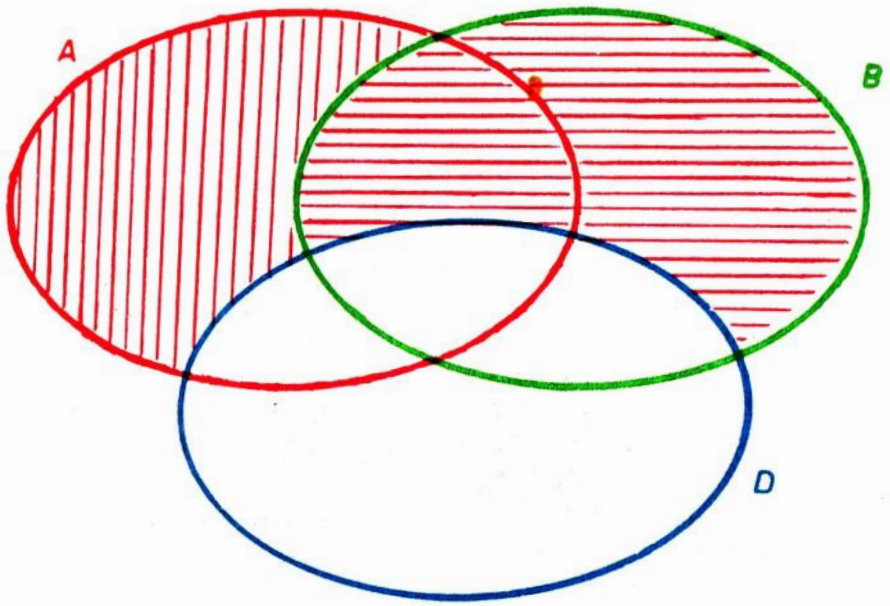
18.4

Veamos un último ejemplo de deducción capaz de haceros rechinar los dientes

Los caballos baratos son escasos.
Todo lo que es escaso es caro.
¡¡¡Entonces, los caballos baratos son caros!!!

En este razonamiento paradójico, relacionamos tres conjuntos:

los caballos = A
las cosas escasas = B
las cosas caras = D



Afirmamos que:

«los caballos baratos (no caros) son escasos»,

es decir,

$(A \setminus D) \subset B$

o también

$(a \setminus D) \setminus B = \varnothing$ (rayado ////)

«las cosas escasas son caras»

es decir,

$B \subset D$

o también

$B \setminus D = \varnothing$ (rayado ≡).

Concluimos que:

«los caballos baratos (= no caros) son raros»,

es decir,

$(A \setminus D) \subset D$

o también

$(A \setminus D) \setminus D = \varnothing$

o también

$A \setminus D = \varnothing$ (que es lo realizado por los dos «rayados» «precedentes»).

De hecho, los dos primeros enunciados implican ya que

$A \setminus D = \varnothing$

es decir: «no hay caballo barato».

Y como el conjunto vacío puede estar contenido en cualquier conjunto,

resulta que, en particular, está contenido en el conjunto de las cosas caras. De ahí nuestra conclusión.

18.5

Admitimos que estas historias de la serpiente de mar, de caballos baratos que son caros, no proporcionan más que un juego y que la matemática moderna tiene otros canguros para azotar. Procurad no confundir al matemático y al sofista, reunidos, además, aquí en un pedagogo. Estos ejemplos no están puestos más que para hacernos reflexionar sobre la falta de comodidad, incluso de precisión, de las formulaciones del lenguaje usual.
Por lo demás, en la historia de las ciencias, las paradojas han sido siempre motivo de escándalo y, por consiguiente, de investigación y progreso. La paradoja de Aquiles y la tortuga, las deudas por juego del Caballero de Méré, la travesía paranoica de los puentes de Koenisberg han abierto a la matemática los inexpugnables dominios del análisis infinitesimal, del cálculo de probabilidades o de la topología.

3

ALGEBRA DE LOS CONJUNTOS

En la cuna del niño hay un sonajero azul, una pelota roja, un oso de peluche. También tiene muy cerca el reloj de papá y la sortija de mamá. El niño los coge. De estos dos tesoros hace un tercero: todo es para él.

1. ¿Qué es una operación numérica?

1.1

Utilizaremos los números porque nos son familiares.
Hemos aprendido que podemos trabajar con los números por medio de cuatro operaciones:

la adición:	$2 + 3 = 5$
la sustracción:	$3 - 2 = 1$
la multiplicación:	$2 \times 3 = 6$
la división:	$14 : 7 = 2$

Estas operaciones tienen en común que permiten asociar un tercer número a dos números dados.
Podríamos muy bien escribir:

$$(2,3) \xrightarrow[+]{} 5$$

$$(3,2) \xrightarrow[-]{} 1$$

$$(2,3) \xrightarrow[\times]{} 6$$

$$(14,7) \xrightarrow[:]{} 2$$

o también [1]:

$$14 \bigstar 7 = \begin{cases} 21 & \text{si } \bigstar = + \\ 7 & \text{si } \bigstar = - \\ 98 & \text{si } \bigstar = \times \\ 2 & \text{si } \bigstar = : \end{cases}$$

1.2

Mientras no conocimos más que los números naturales, pudimos afirmar que:

$2 + 3 = 5$
$2 - 3 =$ no existe
$2 \times 3 = 6$
$2 : 3 =$ no existe

A partir del momento en que conocimos los números racionales positivos (enteros y fraccionarios), pudimos decir que:

$2 + 3 = 5$
$2 - 3 =$ no existe
$2 \times 3 = 6$
$2 : 3 = \frac{2}{3} = 0{,}6666666\ldots$

Y cuando nuestro conocimiento asimiló los números racionales no sólo positivos, sino también negativos, pudimos decir que:

$2 + 3 = 5$
$2 - 3 = -1$
$2 \times 3 = 6$
$2 : 3 = \frac{2}{3}$

Entonces podríamos definir las operaciones con otros números, además de los números enteros:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$
$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}$$
$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

Hay «operación con números» cuando, a partir de dos números elegidos en un determinado conjunto, disponemos de un procedimiento para designar un tercer número perteneciente a este conjunto.

---

(1) ★ se lee «star»; es el signo de una operación voluntariamente elegida e indeterminada. Los anglófobos dicen «truco» o «estrella».

O también:

Una operación está definida en un conjunto de números cuando a toda pareja de números se le puede asociar uno y sólo uno de los números de este conjunto (1).

1.3

El número cuatro es un número sagrado. Se conocen: «cuatro puntos cardinales, cuatro estaciones, cuatro vientos, cuatro jinetes del Apocalipsis, cuatro ríos de los infiernos, cuatro elementos, e incluso cuatro mosqueteros».
Hablamos, pues, de las «cuatro» operaciones de la aritmética, como si no hubiese otras. Ahora bien, se podrían imaginar de muchas maneras; y para limitarnos a las que ya conocemos, proponemos considerar desde ahora como operaciones:

— la obtención del M.C.D. (2) de dos números enteros positivos:
$12 \bigstar 21 = 3$

— la obtención del M.C.M. (3), de dos números enteros positivos:
$12 \bigstar 21 = 84$

— la obtención de la media aritmética de dos números racionales:
$2 \bigstar 8 = 5$

$$\frac{3}{4} \bigstar \frac{2}{3} = \frac{17}{24}$$

— la elevación de un número entero a una potencia:
$2 \bigstar 3 = 8$
$3 \bigstar 2 = 9$

— etc...

Podemos imaginar numerosas operaciones en el conjunto de los numeros. Asociarán siempre un tercer número a dos números dados.

1.4

Harpagón atesoraba monedas; Barba-Azul ahorcaba una a una a sus mujeres en su alacena secreta; gracias a sus famosas botas, el Ogro recorría muchas leguas de camino; la Bella del bosque dormía rápidamente las estaciones de su sueño encantado; D. Juan, ... Las ope-

---

(1) En la enseñanza primaria, se omite generalmente el precisar en qué conjunto particular de números está definida la operación.

(2) Léase: Máximo común divisor

(3) Léase: Mínimo común múltiplo.

raciones realizadas por estas personas consistían en asociar:

un conjunto de monedas con varios conjuntos de monedas,
un conjunto de mujeres con varios conjuntos de mujeres,
un conjunto de leguas con varios conjuntos de leguas,
etc.

Consideradas en su realización concreta, son bastante diferentes; asesinar a su mujer no es lo mismo que dormir un año. Observemos que estas operaciones poseen en común las propiedades:

$$A \bigstar B = B \bigstar A$$
$$(A \bigstar B) \bigstar C = A \bigstar (B \bigstar C)$$
$$A \bigstar \varnothing = A$$
$$A \leqslant A \bigstar B$$

donde vemos que A y B son conjuntos de monedas, de mujeres, de leguas o de besos.

Decimos, pues, que se trata de la misma operación, una más de las simplificaciones abusivas realizadas por el hombre, el único animal que se permite hacerlas:
a cierto nivel de abstracción, la identidad formal de las propiedades nos hace considerar como idénticas algunas operaciones materialmente distintas.

1.5

En cambio, decimos que las cuatro operaciones de la aritmética son diferentes porque no tienen las mismas propiedades en el nivel de abstracción en que las utilizamos.

Por ejemplo:

$2 + 3 = 3 + 2$ $2 \times 3 = 3 \times 2$ Se pueden permutar los términos de una adición y de una multiplicación.	$2 - 3 \neq 3 - 2$ $2 : 3 \neq 3 : 2$ No se pueden permutar los términos (distintos) de una sustracción o de una división.
$4 + (3 + 2) = (4 + 3) + 2$ $4 \times (3 \times 2) = (4 \times 3) \times 2$ Se pueden asociar los términos de una suma y de una multiplicación.	$4 - (3 - 2) \neq (4 - 3) - 2$ $4 : (3 : 2) \neq (4 : 3) : 2$ No se pueden asociar los términos (distintos) de una sustracción o de una división.
$5 \times (3-2) = (5 \times 3) - (5 \times 2)$ $5 \times (3+2) = (5 \times 3) + (5 \times 2)$ La multiplicación es distributiva con respecto a la adición y a la sustracción. etc...	$5 + (3 \times 2) \neq (5+3) \times (5+2)$ $5 : (3+2) \neq (5 : 3) + (5 : 2)$ La adición, la sustracción y la división no son distributivas respecto a la multiplicación.

Estas propiedades nos proporcionan, además, la base técnica del cálculo algebraico informándonos de las transformaciones permitidas o prohibidas.

La sustitución de $a(b + c)$ por $ab + ac$ está permitida.

La sustitución de $a + (b \times c)$ por $(a + b) \times (a + c)$ está prohibida.

2. ¿Qué es una operación en general?

2.1

Preguntémonos, finalmente, si podríamos definir operaciones con otros objetos distintos de los números.

Para eso, basta generalizar nuestra definición:

Una operación está definida en un conjunto si a toda pareja (1) de elementos de este conjunto se le puede asociar un sólo elemento perteneciente a este conjunto.

2.2

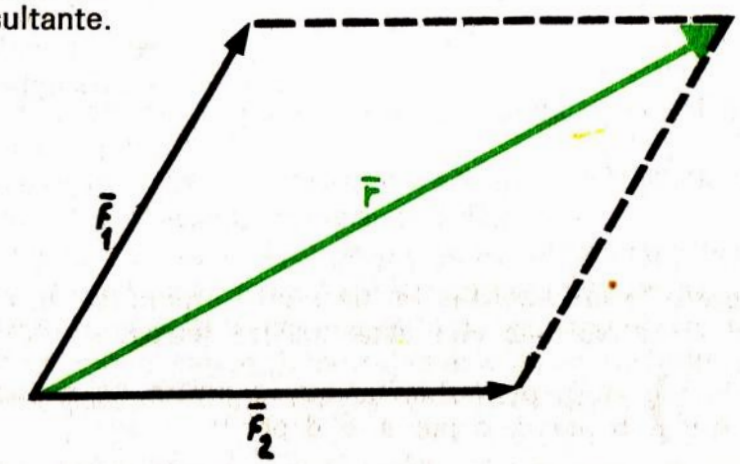
Ejemplos:

2.2.1

Si sustituimos dos fuerzas aplicadas en un mismo punto por su resultante, efectuamos una operación con «fuerzas».

$r = f_1 \star f_2$

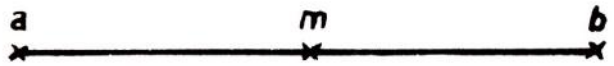
$\star$ = formación de la resultante.



(1) Una «pareja es un «par ordenado»:
el par (a, b) es igual al par (b, a);
la pareja (a, b) no es igual a la pareja (b, a), salvo si $a = b$.
En las operaciones se emplean «parejas» y no «pares» porque el orden de los términos puede modificar el resultado de la operación.

2.2.2

Dividir en dos partes iguales un segmento determinado por dos puntos es una operación en el conjunto de los puntos del espacio.



m = a ★ b
★ = construcción del punto medio.

2.2.3

En un plano π, considerado como un conjunto de puntos, tomamos el punto 0.
Dados dos puntos cualesquiera a y b pertenecientes al plano, construimos un tercer punto cualquiera de la siguiente manera:

c = a ★ b
★ = construcción del paralelogramo o a b c.

2.2.4

Veamos cuatro letras escritas en un cierto orden: (a, b, c, d). Vamos a efectuar permutaciones con estas cuatro letras:

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$ es la permutación, que consiste en sustituir a por b, b por d, c por a, y d por c.

Imaginemos el conjunto de todas las permutaciones posibles. Con cuatro objetos, hay veinticuatro, incluida la permutación idéntica (que consiste en no cambiar nada):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = I$$

Si realizamos dos permutaciones consecutivas, podemos sustituir esta serie de dos permutaciones por una sola permutación [1].

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$$

En consecuencia, en el conjunto de todas las permutaciones posibles con estas letras, podemos asociar a dos permutaciones cualesquiera, una tercera permutación. Es una operación con permutaciones.
Obsérvemos, de paso, que si modificamos el orden de los términos el resultado es modificado:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$$

2.3

Ahora podemos, en una primera aproximación, dar una definición capital:

Un conjunto provisto de una operación proporciona una estructura.

Por ejemplo:

$\mathbb{N}_+$ conjunto de números naturales provistos de la ley de la adición;

π_{0+} conjunto de puntos del plano π provistos de la ley definida en 2.2.3;

S_4 conjunto de todas las permutaciones posibles con cuatro letras.

etc...

2.4

Ya podemos proponeros un pequeño programa para la construcción de la matemática moderna:
Primera etapa: considerar conjuntos «útiles» e introducir operaciones «necesarias», descubriendo las propiedades.
Segunda etapa: comparar las propiedades obtenidas, independientemente de la naturaleza particular de los conjuntos y de las operaciones.
Tercera etapa: generalizar las estructuras obtenidas de esta manera, para que abarquen el mayor número posible de estructuras particulares.
Cuarta etapa: encajar estas estructuras desde las más generales hasta

---

(1) En realidad se escribirá:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$$

Y se llamará «composición» de dos permutaciones.

las más particulares de modo que deduzcamos:
— lo que es verdadero para una estructura particular, a partir de lo que es verdadero para una estructura general;
— lo que es falso para una estructura general, a partir de lo que es falso para una estructura particular.

3. Operaciones en un conjunto de conjuntos

Imaginemos un conjunto de conjuntos; por ejemplo, un conjunto de partes. Si a dos de estos conjuntos les asociamos un tercero por una ley perfectamente definida, introducimos una «operación con conjuntos», lo que permite «calcular» nuevos conjuntos y nos proporciona una «álgebra» de conjuntos.
No creamos que es necesario entender «calcular» en el sentido «numérico». La palabra «cálculo» se refiere simplemente a la formación del conjunto resultante de una operación. **Esta álgebra no contendrá números.**
Las operaciones que vamos a describir preceden al conocimiento del concepto numérico. Están asociadas con operaciones mentales mucho más importantes y nuestra enseñanza deberá manipularlas, extraerlas y manifestarlas con la sistematización de la enseñanza exclusivamente aritmética.
Nos encontramos, pues, en el centro del campo de batalla entre los modernistas y los integristas (1).
Como grito de guerra, el integrista proclama esta necedad: «¡En matemática moderna, no se calcula!».
Por el contrario, en matemática moderna se calcula más, porque se calcula con objetos diferentes de los números.
Y en cuanto a los números de la aritmética usual, tened por seguro que el modernista tiene la misma necesidad vital que cada uno de nosotros. Como todo el mundo, paga sus impuestos y comprueba sus recibos de electricidad.
Y, precisamente, como tiene en cuenta la importancia del cálculo aritmético en la vida social, más que manipular mecánicamente los números, el modernista desea desprenderse de las estructuras profundas. Lo que en términos pedagógicos se resume por la fórmula:

¡NO DOMAR, SINO FORMAR!

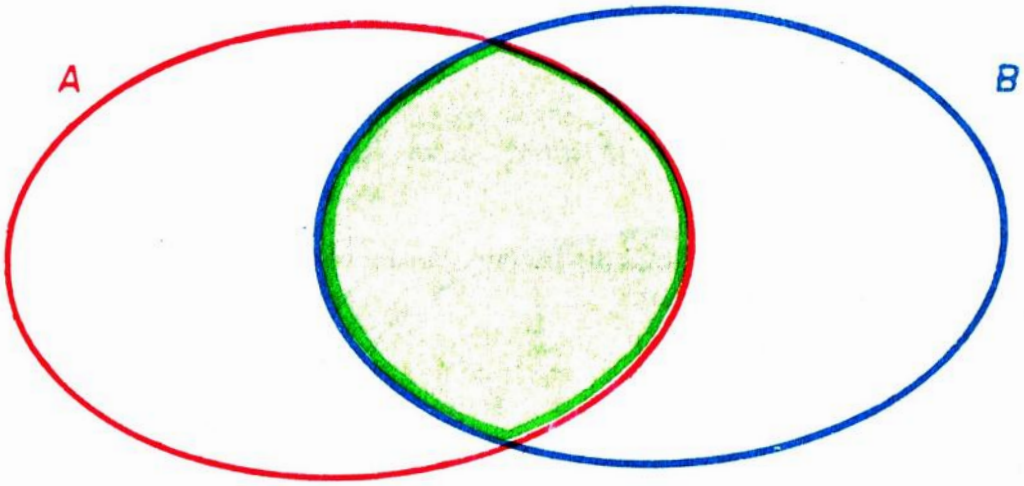
(1) En el siglo XIX, se llamó «modernistas» a los partidarios de la transformación de la Iglesia Católica, e «integristas» a los conservadores de la sociología religiosa. Creemos oportuno utilizar estos términos para designar la oposición actual entre los matemáticos.

4. La intersección

4.1

La intersección de dos conjuntos es un tercer conjunto formado por todos los elementos pertenecientes a la vez a ambos conjuntos.

Se escribe: $A \cap B$ (A intersección B)



$$A \cap B = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in A \\ \text{et} \\ x \in B \end{array} \right\}$$

4.2

El vocabulario es ambiguo, incluso para el modernista.
La palabra «intersección» designa a la vez:
la operación;
el resultado de la operación.
En aritmética, por ejemplo, disponemos de dos palabras distintas

para la operación:	para el resultado:
adición	suma
sustracción	diferencia
multiplicación	producto
división	cociente

Donde pueda existir confusión **escribiremos:**

operación de intersección — conjunto intersección.

Procederemos igual que para las demás operaciones.

4.3

Ejemplos:

4.3.1

Sea el conjunto de los países de la Europa de los Seis.

$E_1 = \{$Alemania, Bélgica, Francia, Italia, Luxemburgo, Países Bajos$\}$

o también:

$E_1 = \{A, B, F, I, L, P\}$.

Sea el conjunto de los países europeos mediterráneos:

$E_2 = \{$Albania, España, Francia, Grecia, Italia, Turquía, Yugoslavia$\}$

o también:

$E_2 = \{N, E, F, G, I, T, Y\}$.

Entonces:

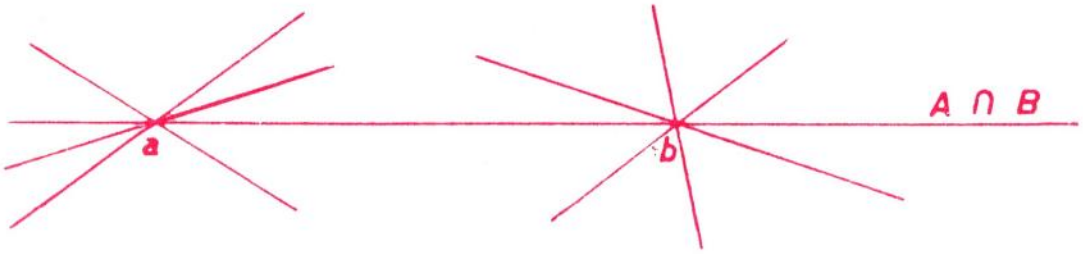
$E_1 \cap E_2 = \{F, I\}$

es el conjunto de los países de la Europa de los Seis que tienen una frontera en el Mediterráneo.

4.3.2

Sea A el conjunto de las rectas que pasan por un punto a.
Sea B el conjunto de las rectas que pasan por un punto b distinto de a.

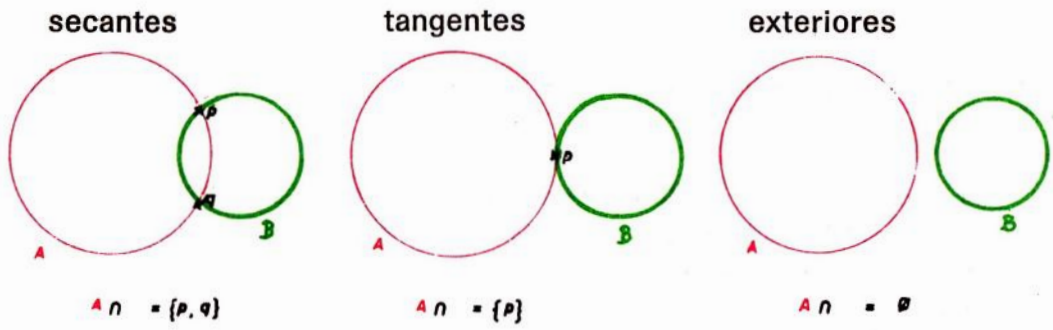
$A \cap B =$ la recta que une a y b.



4.3.3

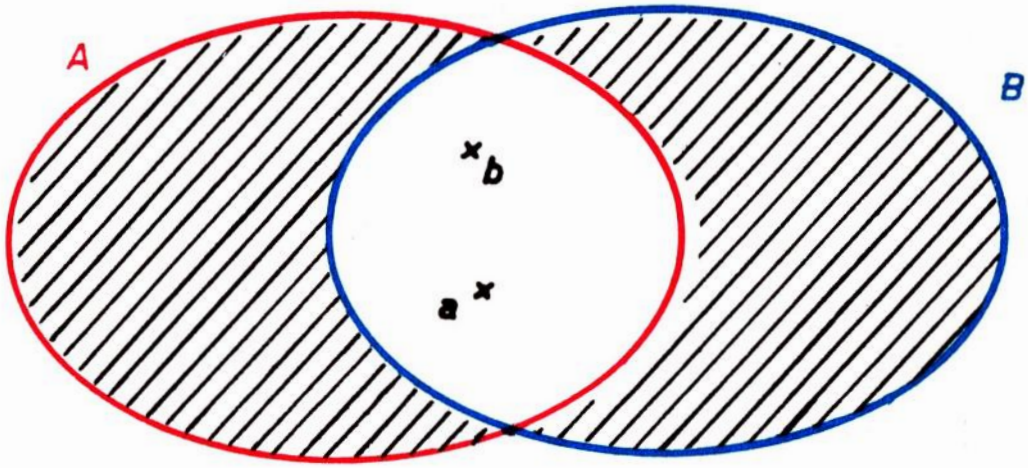
Sean dos circunferencias A y B.
Las dos circunferencias son secantes ssi (1) su intersección es un par.
Las dos circunferencias son tangentes ssi su intersección es un *singleton*.
Las dos circunferencias son exteriores ssi su intersección es vacía.

(1) «ssi» es la abreviatura de «si y sólo si».



4.3.4

Consideremos una recta como un conjunto de puntos.
Si la intersección de dos rectas tiene al menos dos elementos, las dos rectas se confunden.



A: conjunto de puntos de la recta A.

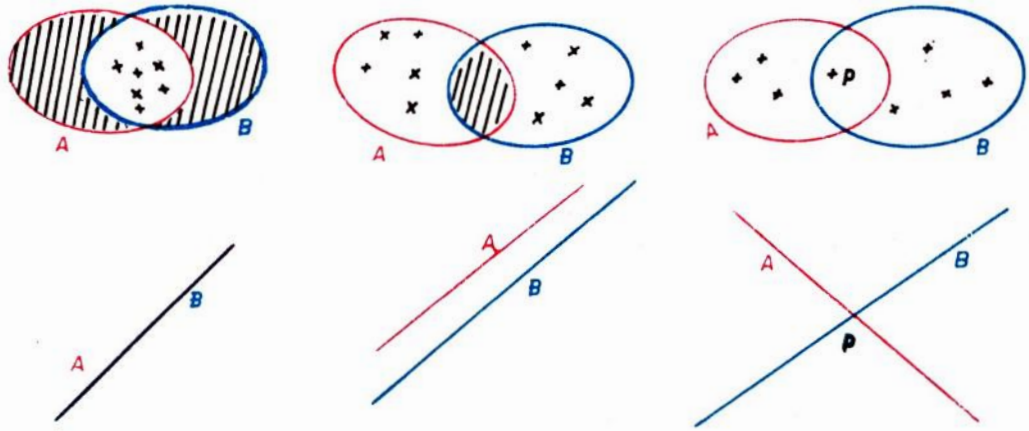
B: conjunto de puntos de la recta B.

Las posiciones respectivas de dos rectas contenidas en un mismo plano vienen dadas por los ideogramas siguientes:

rectas confundidas

rectas paralelas y distintas

rectas secantes y distintas



4.3.5

Podemos ahora presentar bajo una forma distinta ciertas propiedades de los números naturales.
Sean:

D_n : el conjunto de los divisores del número natural n.
M_n: el conjunto de los múltiplos del número natural n.
$M_{12} = \{12, 24, 36, 48...\}$
$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12...\}$
$D_7 = \{1, 7\}$.

Un número es **primo** si y sólo si el conjunto de sus divisores es un par.
Tenemos:

$M_{12} \cap D_{12} = \{12\}$
$M_n \cap D_n = \{n\}$

Además:

$M_{12} \cap M_{18} = M_{72}$
$D_{12} \cap D_{18} = D_6$

El conjunto de los «múltiplos comunes» es la intersección de los conjuntos de múltiplos.
El conjunto de los «divisores comunes» es la intersección de los conjuntos de divisores.

$D_{18} \cap D_{35} = \{1\}$.

Dos números son «primos entre sí» si la intersección de los conjuntos de sus divisores es un singleton.

4.3.6

He aquí un ejemplo bastante original elegido en el campo musical (1).

El conjunto de notas utilizadas en música es (considerando los semitonos):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
do,	do #,	re,	re #,	mi,	fa,	fa #,	sol,	sol #,	la,	la #,	si

Podemos expresarlas con cifras (expresando el número de los semitonos a partir del do).
Si x es una nota, $x + 12$ es la misma nota: $x = x + 12$.
Una escala mayor en x está formada por un conjunto de notas:
$G_x = \{x, x + 2, x + 4, x + 5, x + 7, x + 9, x + 11\}$.
Una escala menor en x está formada por un conjunto de notas:
$G'_x = \{x, x + 2, x + 3, x + 5, x + 7, x + 8, x + 11\}$.
A partir de las escalas de do, de re, de sol, se construyen las notas

(1) Nota: V. *La musique, discipline scientifique*, por Pierre BARBAUD (Dunod).

de la música llamada «china» como intersección de tres escalas.
$G_0 \cap G_2 \cap G_7 = \{2, 4, 7, 9, 11\} = \{re, mi, sol, la, si\}$.

4.4

Propiedades de la intersección

4.4.1

Absorción:

Siempre $A \cap \emptyset = \emptyset$

puesto que el vacío no tiene ningún elemento.
Se dice: **El vacío es absorbente para la intersección** (1).
(E es absorbente para ★ si A ★ E = E, cualquiera que sea A; por ejemplo, «cero» es absorbente para la multiplicación.)

4.4.2

Idempotencia:

Siempre $A \cap A = A$

Se dice que **la intersección es idempotente**
(la multiplicación y la adición no son idempotentes).

4.4.3

Conmutatividad:

Siempre $A \cap B = B \cap A$

Se dice que **la intersección es conmutativa**
(la adición y la multiplicación de dos números es conmutativa; la sustracción y la división no son conmutativas).

4.4.4

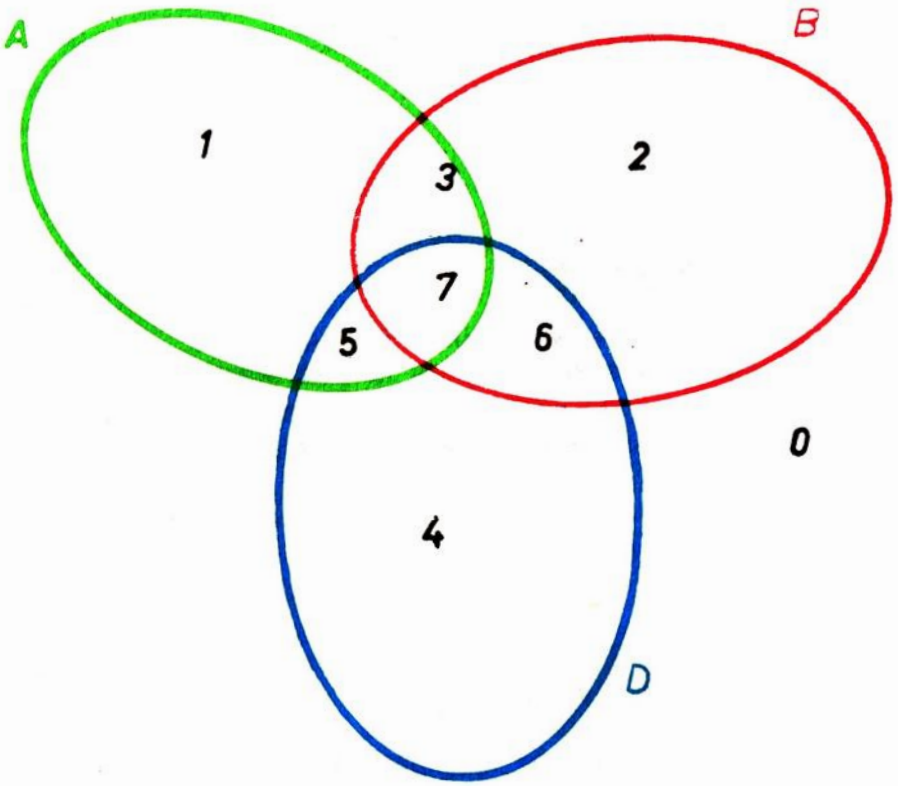
Asociatividad:

Siempre $(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$

---

(1) Veremos aparecer un vocabulario creado por la matemática moderna: «**absorbente**», «compacto», «árbol», «red», «enrejado», etc.

Se dice que **la intersección es asociativa**
(la adición y la multiplicación de dos números son asociativas; la sustracción y la división no lo son).



Vamos a ver la evidencia de esta propiedad imaginando que cada conjunto está formado por cuatro elementos dispuestos como lo hemos hecho en el ideograma en hoja de trébol:

$A \cap B = \{ 3, 7 \}$ $\qquad$ $D = \{ 4, 5, 6, 7 \}$

$(A \cap B) \cap D = \{ 7 \}$

et

$A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ $\qquad$ $B \cap D = \{ 6, 7 \}$

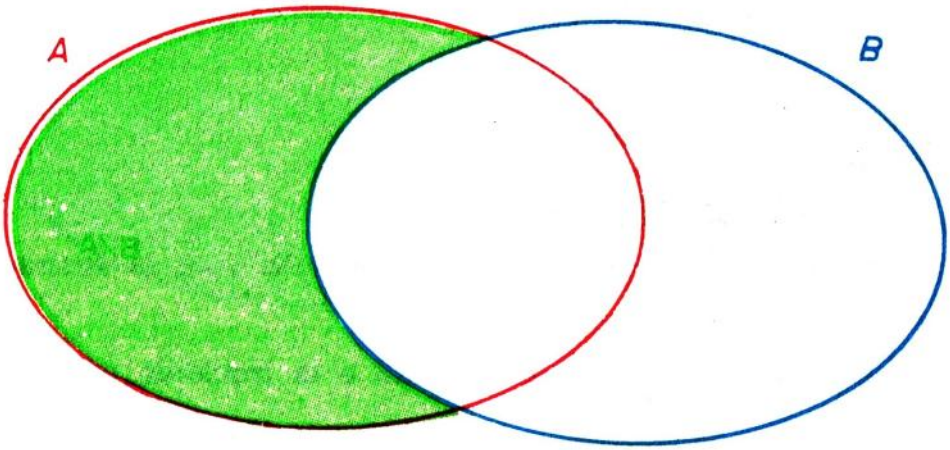
$A \cap (B \cap D) = \{ 7 \}$

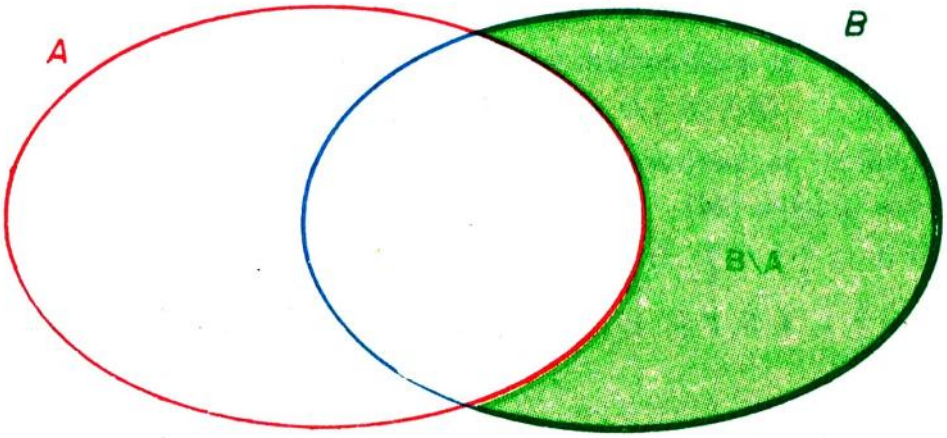
Escritura: Como consecuencia de la asociatividad podemos escribir $(A \cap B) \cap C$ sin utilizar paréntesis: $A \cap B \cap C$.

5. La sustracción [1]

5.1

La diferencia de dos conjuntos A y B es un tercer conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A sin pertenecer a B.





Se escribe **A\B**
(A menos B)

$$A \setminus B = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in A \\ y \\ x \notin B \end{array} \right\}$$

$$B \setminus A = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} x \notin A \\ y \\ x \in B \end{array} \right\}$$

(1) Aquí el vocabulario nos proporciona dos palabras: «sustracción» para la operación, «diferencia» para el resultado.

Ejemplo: Si representamos los países de Europa por:

$E_1 = \{A, B, F, I, L, P\}$ y $E_2 = \{N, E, F, G, I, T, Y\}$

el conjunto de los países de la Europa de los Seis que no tienen frontera con el Mediterráneo es:

$E_1 \setminus E_2 = \{A, B, L, P\}$

El conjunto de los países que tienen frontera con el Mediterráneo pero que no pertenecen a la Europa de los Seis es:

$E_2 \setminus E_1 = \{N, E, G, T, Y\}$

5.2

Propiedades

Siempre: $A \setminus \varnothing = A$

lo que se lee: **el vacío es neutro a la derecha para la sustracción.**

Siempre: $\varnothing \setminus A = \varnothing$

lo que significa: **el vacío es absorbente a la izquierda para la sustracción.**

Siempre: $A \setminus A = \varnothing$

En general: $A \setminus B \neq B \setminus A$

que significa: **la sustracción no es conmutativa.**

En general: $(A \setminus B) \setminus D \neq A \setminus (B \setminus D)$

que significa: **la sustracción no es asociativa.**

En efecto (página 124).

$A \setminus B = \{1, 5\}$ $D = \{4, 5, 6, 7\}$ $(A \setminus B) \setminus D = \{1\}$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B \setminus D = \{2, 3\}$ $A \setminus (B \setminus D) = \{1, 5, 7\}$

6. La unión

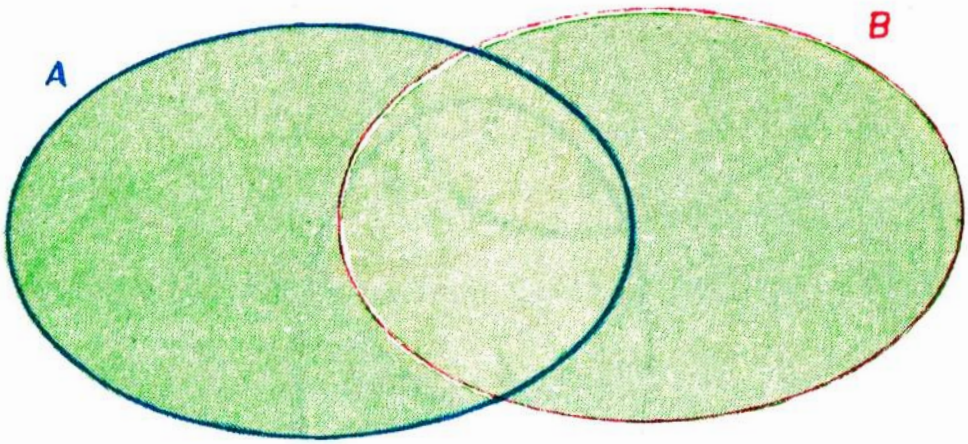
6.1

La **unión** de dos conjuntos es un tercer conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno o [1] al otro de los dos conjuntos (en particular a los dos). (La palabra «unión» designa generalmente la operación.)

Escribiremos: $A \cup B$ (A unión B)

$$A \cup B = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in A \\ o \\ x \in B \end{array} \right\} \quad (1)$$

(1) Empleamos el «o» en el sentido: y/o.



Ejemplo: Para los países de Europa:

$$E_1 \cup E_2 = \{N, A, B, E, F, G, I, L, P, T, Y\}.$$

6.2

Propiedades de la unión

Se tiene siempre que: $A \cup \emptyset = A$

que significa: **el vacío es neutro para la unión.**

Se tiene siempre que: $A \cup A = A$

que significa: **la unión es idempotente.**

Se tiene siempre que: $A \cup B = B \cup A$

lo que significa: **la unión es conmutativa.**

Se tiene siempre que: $(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$

lo que significa: **la unión es asociativa.**

Lo que permite escribirla: $A \cup B \cup D$

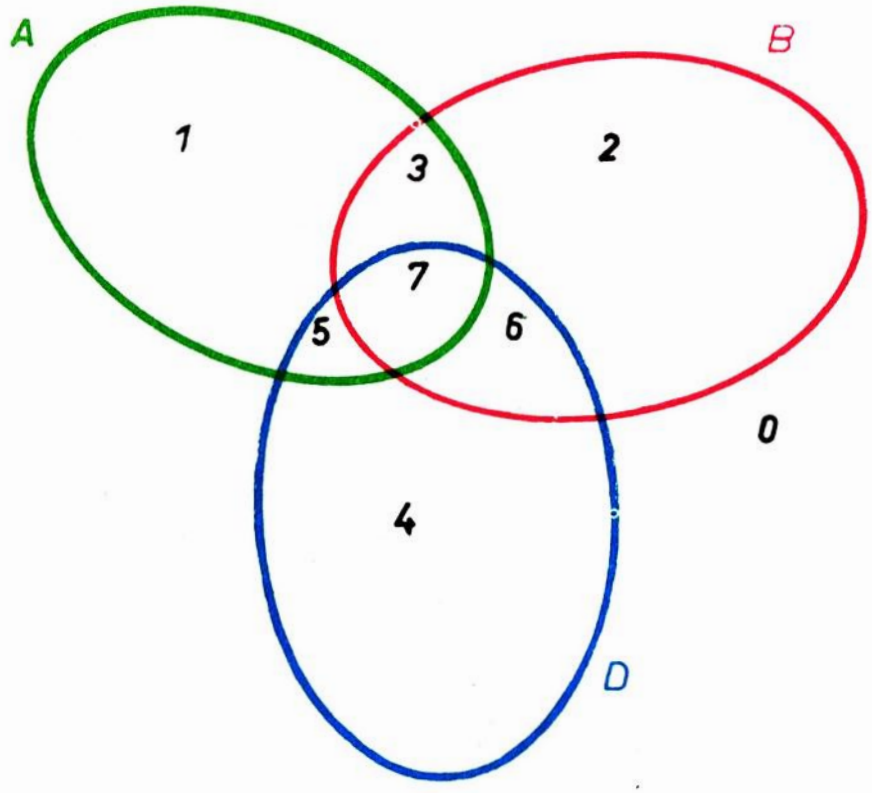
6.3

Vamos a establecer ahora las propiedades relativas a la vez a la interseccion y a la unión.

Distributividad de $\cap$ con respecto a $\cup$:

Se tiene siempre que: $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$

cualesquiera que sean A, B, D.



$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\qquad$ $B \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap (B \cup D) = \{3, 5, 7\}$

$A \cap B = \{3, 7\}$ $\qquad$ $A \cap D = \{5, 7\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap D) = \{3, 5, 7\}$

Distributividad de $\cup$ con respecto a $\cap$.

Se tiene siempre [1] $\quad A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$

Antidistributividad de $\setminus$ con respecto a $\cup$
$\setminus$ con respecto a $\cap$

Se tiene siempre: $\quad A \setminus (B \cup D) = (A \setminus B) \cap (A \setminus D)$

$A \setminus (B \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus D)$

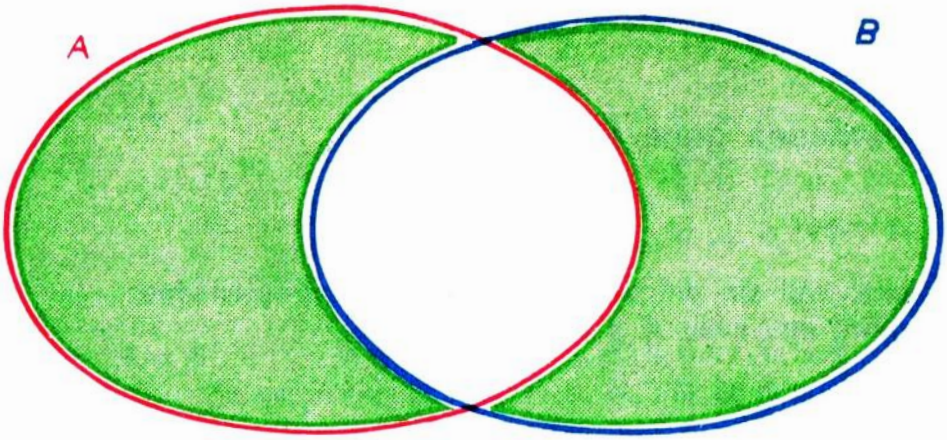
7. La diferencia simétrica

7.1

Nos queda por definir la última operación que reúne las dos regiones sin solaparse (las alas de la mariposa, como dicen los niños jugando con el ideograma de Venn).

(1) Dejamos como ejercicio para el lector establecer las propiedades siguientes por el mismo método que hemos seguido con la propiedad anterior.

La diferencia simétrica de dos conjuntos es un tercer conjunto formado por todos los elementos que pertenecen **sea** a uno, **sea** al otro conjunto (pero jamás a los dos).



Escribiremos $A \triangle B$ (A delta B) (1)

$$A \triangle B = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in A \text{ y } x \notin B \\ \text{o} \\ x \notin A \text{ y } x \in B \end{array} \right\}$$

Ejemplo:
Con los países de Europa:

$$E_1 \triangle E_2 = \{N, A, B, E, G, L, P, T, Y\}.$$

7.2

Propiedades de la diferencia simétrica

Tenemos, inmediatamente, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

donde vemos aparecer la unión de las dos «alas de mariposa»

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

donde vemos claramente que la «mariposa» se ha quitado el «tórax» para conservar las «dos alas».

Se tiene siempre: $A \triangle B = B \triangle A$

El vacío es neutro para la diferencia simétrica.

Se tiene siempre: $A \triangle \varnothing = \varnothing \triangle A = A$

La diferencia simétrica es conmutativa.

En efecto
$$\begin{aligned} A \triangle \varnothing &= (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) \\ &= A \cup \varnothing \\ &= A \end{aligned}$$

(1) Algunos matemáticos representan esta operación por $\otimes$ y la llaman «suma disyuntiva».

Se tiene siempre: $A \triangle A = \varnothing$

En efecto
$$\begin{aligned} A \triangle A &= (A \setminus A) \cup (A \setminus A) \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

8. Propiedades generales

8.1

Se comprobarán sin dificultad las siguientes propiedades:
Cualesquiera que sean A y B se tiene:

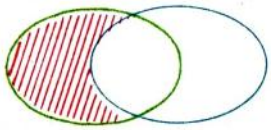
$$A \cap B \subset A$$
$$A \cap B \subset B$$
$$A \cap B \subset A \cup B$$
$$A \setminus B \subset A$$
$$A \setminus B \subset A \triangle B$$
$$A \setminus B \subset A \cup B$$
$$B \setminus A \subset B$$
$$B \setminus A \subset A \triangle B$$
$$B \setminus A \subset A \cup B$$
$$A \subset A \cup B$$
$$B \subset A \cup B$$
$$A \triangle B \subset A \cup B$$

$$A \cap B \not\subset A \setminus B$$
$$A \cap B \not\subset B \setminus A$$
$$A \cap B \not\subset A \triangle B$$
$$A \setminus B \not\subset B$$
$$B \setminus A \not\subset A$$

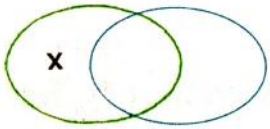
8.2

Se comprobarán sin dificultad las siguientes equivalencias:
Cualesquiera que sean A y B se verifica:

$A \subset B$ $\Leftrightarrow$
$$\begin{aligned} A \setminus B &= \varnothing \\ A \cap B &= A \\ A \triangle B &= B \setminus A \\ A \cup B &= B \end{aligned}$$



$A \not\subset B$ $\Leftrightarrow$
$$\begin{aligned} A \setminus B &\neq \varnothing \\ A \cap B &\neq A \\ A \triangle B &\neq B \setminus A \\ A \cup B &\neq B \end{aligned}$$

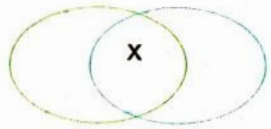


$A \not\supset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset$

$A \setminus B \neq A$

$B \setminus A \neq B$

$A \triangle B \neq A \cup B$

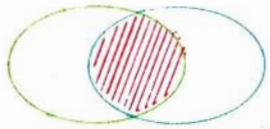


$A \not\subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$

$A \setminus B = A$

$B \setminus A = B$

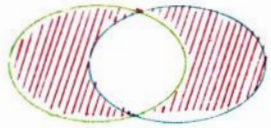
$A \triangle B = A \cup B$



$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$

$A \cap B = A = B = A \cup B$

$A \triangle B = \emptyset$



$A \neq B \quad \Leftrightarrow \quad A \triangle B \neq \emptyset$

o

9. Tautologías y no tautologías

9.1

No se pueden confundir enunciados tales como:

$$A \cap B = B \quad \text{y} \quad A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$$

El enunciado:

$$A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$$

es **verdadero cualesquiera que sean A y B,** es decir, **es siempre verdadero.** Es una **tautología** (o una identidad); si no nos damos cuenta desde el primer momento, es porque está enmascarada por la escritura y por nuestra falta de hábito en su utilización. Pero este enunciado no aporta ninguna información especial. **No podría no ser enunciado.**

El enunciado

$$A \cap B = B$$

es verdadero nada más que para determinados conjuntos A y B.

No es una tautología.

Encontraríamos la misma oposición en álgebra donde:

$$x + 2x \equiv 3x$$

$$x + 2y + 1 \equiv 3x + 5y + 3 - 2x - 3y - 2$$

$$(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$$

son **identidades,** es decir, igualdades verdaderas cualesquiera que sean los valores de x e y:

$$\begin{array}{lll} x + 5 & = 2x + 1 & (x = 4) \\ x^2 - 3x + 2 & = 0 & (x = 1 \text{ o } x = 2) \\ x + y - 1 & = 0 & \end{array}$$

no son igualdades verdaderas nada más que para algunos valores dados a x e y, es decir, **ecuaciones.**

9.2

Encontraremos igualmente enunciados **contradictorios** (o absurdos), es decir, enunciados falsos cualesquiera que sean las sustituciones que se hagan con las letras que en ellos figuran.
Los enunciados siguientes son contradictorios:

$$\begin{array}{ll} (A \setminus B) \between (A \cap B) & (?\,!) \\ (A \setminus B) \between (B \setminus A) & (?\,!) \\ (A \setminus B) \between B & (?\,!) \\ (B \setminus A) \between (A \cap B) & (?\,!) \\ (B \setminus A) \between A & (?\,!) \\ (A \cap B) \between A \triangle B & (?\,!) \end{array}$$

9.3

Nos damos cuenta ahora de una grave dificultad de escritura.
Cuando escribimos un enunciado, en principio, lo consideramos como «verdadero». Por ejemplo, si decimos «llueve», significa que consideramos como **real** «el hecho de llover».
Los enunciados matemáticos escritos se consideran, pues, como verdaderos.
También habría que distinguir los que son verdaderos cualesquiera que sean los cambios efectuados por las letras, de los que no son verdaderos nada más que para ciertos valores.
También habría que escribirlos sin dar por «verdaderos» los que, precisamente, no lo son jamás.
Una de las maneras de soslayar esta dificultad consiste en el empleo de «cuantificadores».
La tautología se escribirá: $\forall A \forall B : \quad A \subset A \cup B$
(para todo A y para todo B, se tiene: $A \subset A \cup B$).
Escribiremos: $\exists A \; \exists B : \quad A \cap B = B$
(existen A y B tales como: $A \cap B = B$).

9.4

Los filósofos han llamado «analíticos» a los juicios que se reducen a tautologías o a contradicciones, y «sintéticos» a los demás juicios.

Un juicio analítico permite distinguir lo «verdadero» de lo «falso» sin recurrir a una experimentación sobre la naturaleza real de los seres considerados.
Un juicio «sintético» [1] necesita una experimentación particular para establecer su verdad o su falsedad.

9.5

Y por fin en esta álgebra de conjuntos, donde, según los integristas, «no se calcularía», no sólo podemos demostrar identidades, sino también resolver ecuaciones.

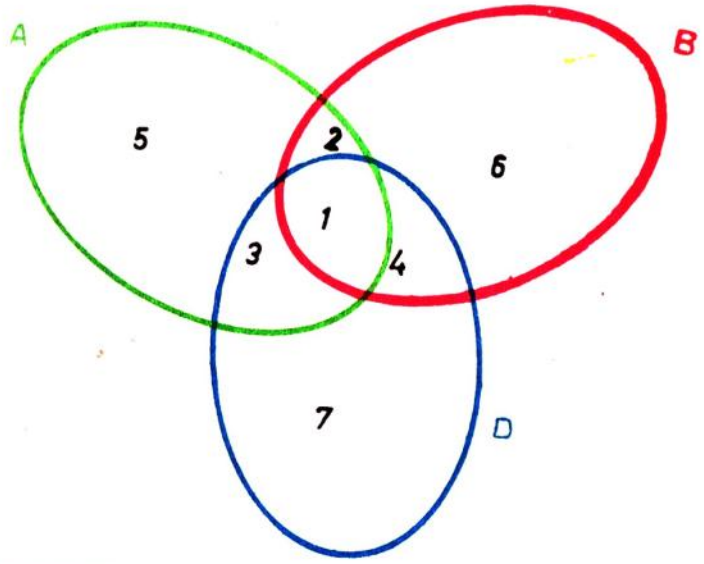
9.5.1

Identidad

Demostrar: $(A \triangle B) \triangle D \equiv A \triangle (B \triangle D)$

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 5\} \\
B &= \{1, 2, 4, 6\} \\
A \triangle B &= \{3, 4, 5, 6\} \\
D &= \{1, 3, 4, 7\} \\
(A \triangle B) \triangle D &= \{1, 5, 6, 7\} \\
B \triangle D &= \{2, 3, 6, 7\} \\
A \triangle (B \triangle D) &= \{1, 5, 6, 7\}
\end{aligned}
$$

$=$



(1) Algunos dicen: «juicios anfóteros». ¡Un término bien sabio! Su uso no parece imponerse.

9.5.2

Ecuación

¿Para qué conjuntos A, B, D tenemos $A \setminus (B \setminus D) = (A \setminus B) \setminus D$?

$B \setminus D = \{2, 6\}$ $\quad A \setminus B = \{3, 5\}$

$A \setminus (B \setminus D) = \{1, 3, 5\}$ $\quad (A \setminus B) \setminus D = \{5\}$

Es preciso que $\{1, 3, 5\} = \{5\}$

es decir, que $\{1, 3\} = \varnothing$

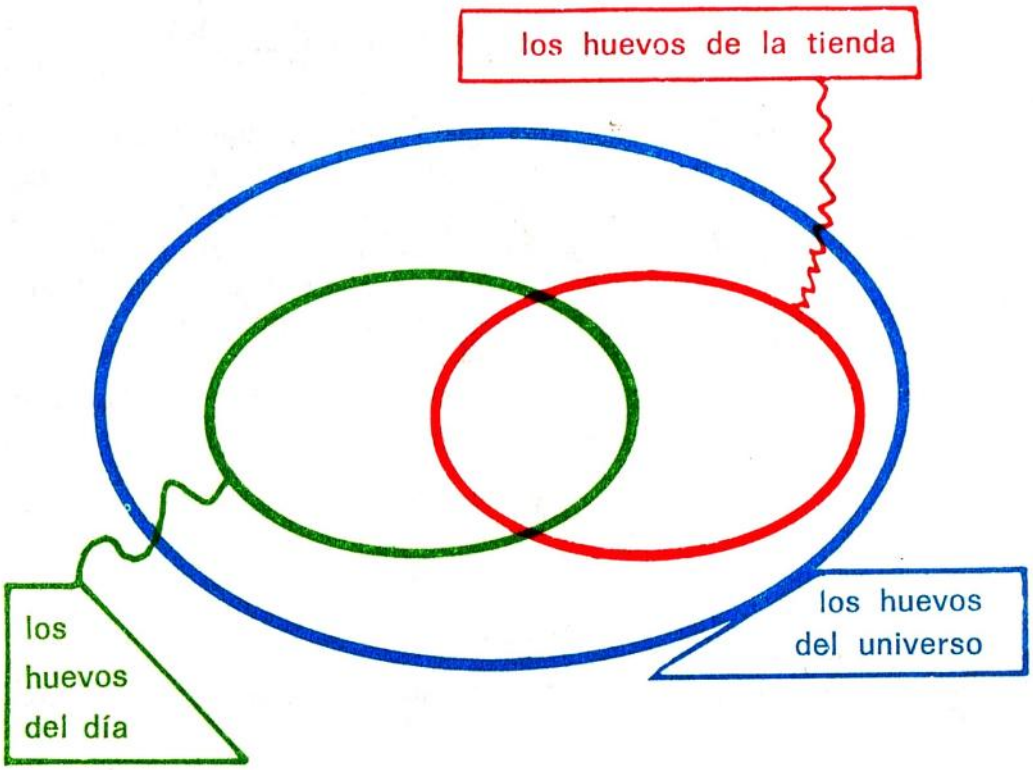
es decir, que $A \not\cap D$

A y D deben ser disyuntivos.

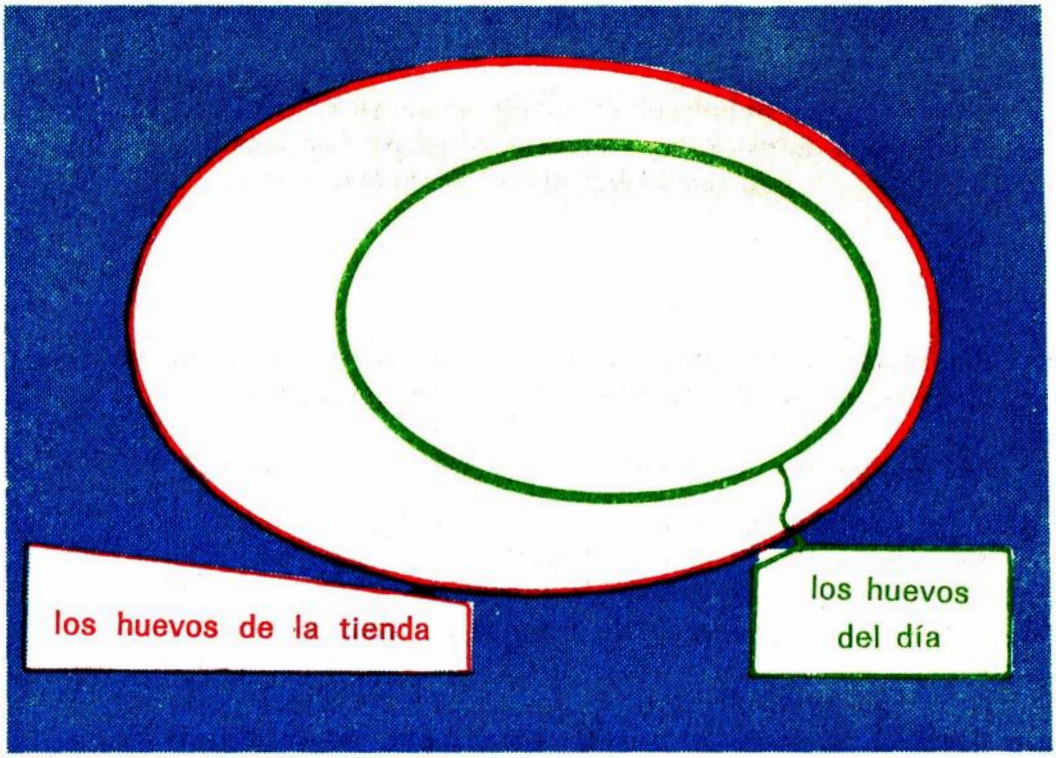
10. Referencial

10.1

Si en casa de vuestro huevero decís: «¡Deme usted todos los huevos del día!», está claro que no le pedís la totalidad de los huevos del día puestos por todas las gallinas del universo, sino los huevos del día que tiene en su tienda. Dicho de esta manera, reducís el conjunto de los huevos del universo al conjunto de los huevos de la tienda; es en este nuevo universo donde limitáis los conjuntos, donde pensáis, donde os expresáis.



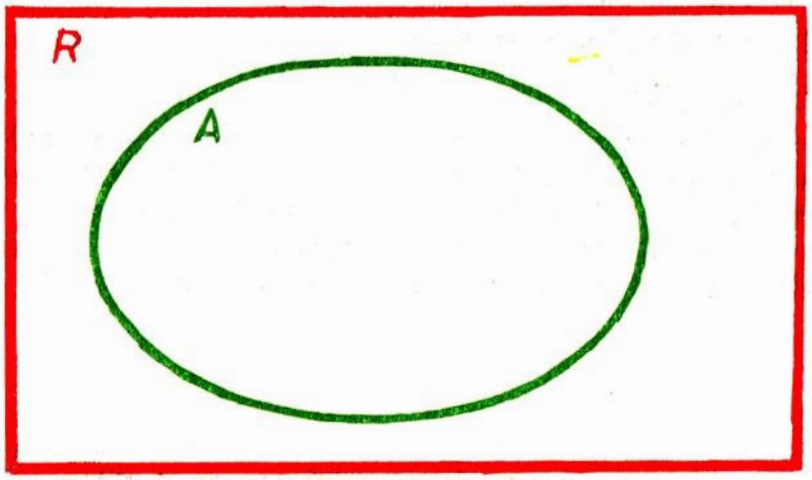
Se convierte en:



¡Atención! Lo que está pintado de azul (y no rayado) no es **necesariamente vacío.**
Se trata simplemente de lo que no se tiene en cuenta,
de lo que no se habla.

10.2

Para simplificar el ideograma, se representará a menudo el conjunto aquel, limitado por un rectángulo (un «marco»).



A = los huevos del día.
R = los huevos de la tienda.

El conjunto que se limita convencionalmente se llama **conjunto** o **discurso universal,** o también **referencial.**
En otras palabras:

El conjunto universal (o referencial) es el conjunto en cuyo interior se conviene efectuar las particiones inducidas por el lenguaje.

10.3

Esta delimitación, esta reducción voluntaria del universo de los objetos es tan frecuente que no merece la pena destacarla.
Si digo:

«los cuadernos de francés están sobre mi mesa»,

se trata de los cuadernos de francés de todos mis alumnos,
o de mis propios cuadernos de francés,
o de los cuadernos de francés de mis mejores alumnos,
y no de todos los cuadernos de francés del mundo.
Si digo:

«las lilas están en flor»

no se trata de las lilas del mundo, sino, quizá, de las de mi jardín.

11. Complementación

11.1

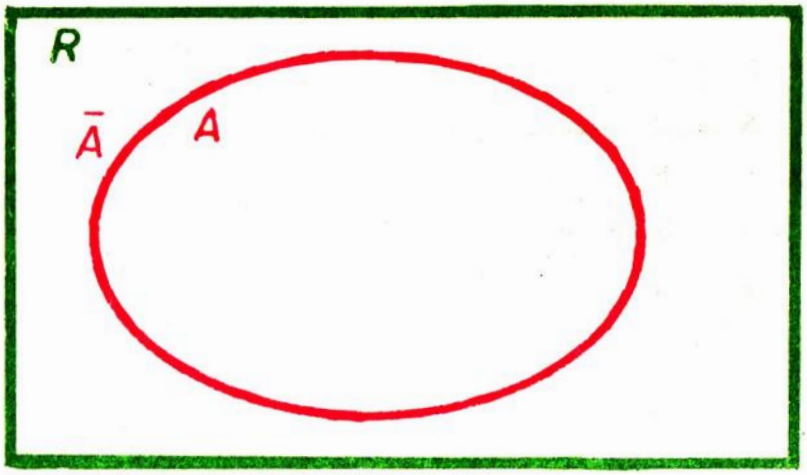
Se utilizan frecuentemente definiciones negativas del tipo:

— los que no son frescos,
— los que no estudian latín,
— a los que no he corregido el trabajo,
— etc...

Evidentemente, esta complementación no se efectúa con respecto a la totalidad del universo, sino con respecto a un determinado conjunto universal (que se considera correctamente definido).
Los conjuntos así definidos son complementarios de los primeros (definiciones positivas) con respecto al referencial.

11.2

El complemento de un conjunto es la diferencia entre el referencial y el conjunto.



Se escribe $\complement_R A$ (o también $R \setminus A$).

Si consideramos siempre el mismo conjunto universal se utiliza la notación más sencilla:

$$\complement_R A = \bar{A}$$

$$\boxed{\bar{A} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in R \\ y \\ x \notin A \end{array} \right\}}$$

11.3

Principio de doble complementación:

$$\bar{\bar{A}} = A$$

El complemento del complemento de un conjunto es el conjunto inicial.

Entendamos bien que esto es válido sólo si se efectúa cada complementación con respecto al mismo referencial.
Sin lo cual tenderíamos a razonamientos como:

todo lo que no es tragedia en verso es tragedia en prosa;
todo lo que no es tragedia en prosa es comedia en prosa;
luego, las tragedias en verso son comedias en prosa (?!).

11.4

Siempre se verifica

$$\bar{\varnothing} = R$$
$$\bar{R} = \varnothing$$

$$A \cap R = A$$
$$A \cup R = R$$
$$A \setminus R = \varnothing$$
$$R \setminus A = \bar{A}$$
$$A \triangle R = \bar{A}$$
$$A \cup \bar{A} = R$$
$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$
$$A \setminus \bar{A} = A$$
$$\bar{A} \setminus A = \bar{A}$$
$$A \triangle \bar{A} = R$$
$$\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{array}\right\} \text{Leyes de Morgan.}$$
$$\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup B$$
$$\overline{B \setminus A} = A \cup \bar{B}$$
$$A \setminus B = \bar{B} \setminus \bar{A}$$
$$B \setminus A = \bar{A} \setminus \bar{B}$$
$$\overline{A \triangle B} = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$A \triangle B = \bar{A} \triangle \bar{B}$$
etc...

11.5

Quizás os extrañéis ante la cantidad de tautologías alineadas al lado de las páginas. ¿Cómo meterse todo esto en la cabeza?
Evidentemente, no hay más que conocer la definición de los signos fundamentales (y familiarizarse con ellos utilizándolos). Una vez que estos signos se han aprendido, todas las tautologías se conciben de golpe como tales.

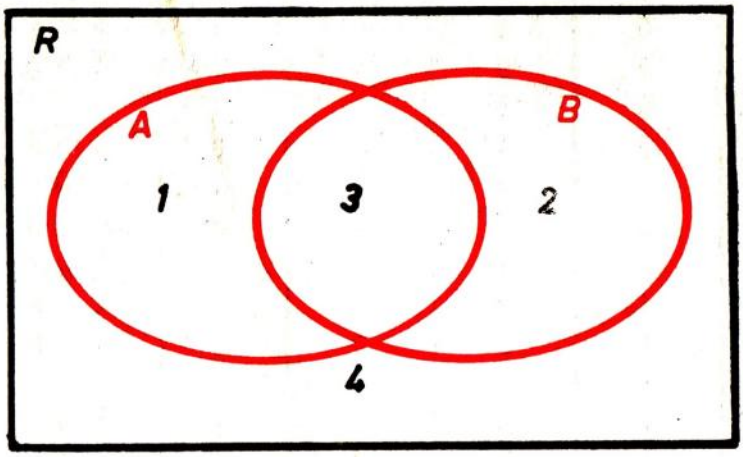
11.6

Se tiene siempre que:

$$A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$$
$$A = B \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$$
$$A \not\subset B \Leftrightarrow A \not\supset \bar{B}$$
etc...

Vamos a demostrar las primeras de estas relaciones, que nos permiten permutar (complementándolas) los términos de una inclusión.

Ejemplo: Sean A: los mamíferos
R: los animales
B: los vertebrados



los mamíferos son vertebrados

todo lo que no es vertebrado no es mamífero

$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \varnothing) \Leftrightarrow (\{1\} = \varnothing)$

$(\overline{B} \subset \overline{A}) \Leftrightarrow (B \setminus \overline{A} = \varnothing) \Leftrightarrow (\{1\} = \varnothing)$

$\Leftrightarrow$

12. Operaciones que se pueden realizar con dos conjuntos[1]

12.1

Sean dos conjuntos A y B en un referencial R.
La partición máxima de R es la que contiene cuatro subconjuntos:

$$\left\{ A \cap B,\ A \cap \overline{B},\ \overline{A} \cap B,\ \overline{A} \cap \overline{B} \right\}$$

Llamaremos a estos cuatro subconjuntos «**minitérminos**».
A partir de estos cuatro minitérminos podemos formar el conjunto de las partes de R.
Para esto, construimos una tabla con cada uno de los minitérminos como cabeza de columna. En cada línea, efectuamos la unión de los minitérminos marcados con el signo 1.
Obtenemos de esta manera el conjunto de partes de R.

(1) Todo lo que sigue en este capítulo no es necesario para la lectura de los capítulos posteriores. Se trata de «manipulaciones» destinadas a probar vuestra comprensión.

N.º orden	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	Conjunto formado por unión
0	0	0	0	0	$\varnothing$
1	0	0	0	1	$\overline{A} \cap \overline{B}$
2	0	0	1	0	$\overline{A} \cap B = B \setminus A$
3	0	0	1	1	$\overline{A}$
4	0	1	0	0	$A \cap \overline{B} = A \setminus B$
5	0	1	0	1	$\overline{B}$
6	0	1	1	0	$A \triangle B$
7	0	1	1	1	$\overline{A} \cup \overline{B}$
8	1	0	0	0	$A \cap B$
9	1	0	0	1	$\overline{A} \triangle B$
10	1	0	1	0	B
11	1	0	1	1	$\overline{A} \cup B$
12	1	1	0	0	A
13	1	1	0	1	$A \cup \overline{B}$
14	1	1	1	0	$A \cup B$
15	1	1	1	1	R

Obtenemos **16 operaciones** posibles con dos conjuntos.
Todas estas operaciones no son igualmente «útiles».
Por ejemplo: no son útiles:

la operación (0) que da $\varnothing$ como resultado
la operación (3) que da $\overline{A}$ como resultado
la operación (5) que da $\overline{B}$ como resultado
la operación (10) que da B como resultado
la operación (12) que da A como resultado
la operación (15) que da R como resultado.

sean cuales fueren A y B

Las operaciones (1), (2), (4), (6), (7), (8), (9), (11), (13), (14) presentan una cierta utilidad puesto que encontramos operaciones ya definidas tales como:

(2) $= \setminus$ $(B \setminus A)$ (4) $= \setminus$ $(A \setminus B)$ (6) $= \triangle$

(8) $= \cap$ (14) $= \cup$

12.2

Los matemáticos se plantean los problemas más absurdos.
Así, han podido demostrar que algunos signos se podían reducir a otros. Por ejemplo:

$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ (que forma $\cup$ a partir de $\cap$ y —)
$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ (que obtiene $\cap$ a partir de $\cup$ y —)
$A \triangle B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ (que obtiene $\triangle$ a partir de $\cup$, $\cap$ —)
etc...

Nos preguntamos si todos los signos que representan a las 16 operaciones no podrían ser escritos a partir de uno sólo. En este caso, tendríamos una operación capaz de engendrar a las demás.
Encontramos dos signos que cumplen esta condición:

el signo representativo de $\bar{A} \cap \bar{B}$ (1) y

el signo representativo de $\bar{A} \cup \bar{B}$ (2).

Vamos a demostrar que el signo de Peirce, que representamos por $\downarrow$, permite efectivamente esta construcción.

$$A \downarrow B = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{(por definición)}$$

de donde $A \downarrow A = \bar{A}$

$$A \downarrow (A \downarrow A) = A \downarrow \bar{A} = \varnothing$$

$$A \downarrow (A \downarrow A) \downarrow A \downarrow (A \downarrow A) = \varnothing \downarrow \varnothing = R$$

$$A \downarrow A \downarrow B \downarrow B = A \cap B$$

$$A \downarrow B \downarrow A \downarrow B = A \cup B$$

Lo que permite escribir las 16 operaciones:

(0) $A \downarrow A \downarrow A$

(1) $A \downarrow B$

(2) $A \downarrow B \downarrow B$

(3) $A \downarrow A$

(4) $A \downarrow A \downarrow B$

(5) $B \downarrow B$

(6) $A \downarrow A \downarrow B \downarrow A \downarrow B \downarrow B \downarrow A \downarrow A \downarrow B \downarrow A \downarrow B \downarrow B$

(7) $A \downarrow A \downarrow B \downarrow B \downarrow A \downarrow A \downarrow B \downarrow B$

(8) $A \downarrow A \downarrow B \downarrow B$

(9) $A \downarrow A \downarrow B \downarrow B \downarrow A \downarrow B \downarrow A \downarrow A \downarrow B \downarrow B \downarrow A \downarrow B$

(10) B

(11) $A \downarrow A \downarrow B \downarrow A \downarrow A \downarrow B$

(12) A

(13) $A \downarrow B \downarrow B \downarrow A \downarrow B \downarrow B$

(14) $A \downarrow B \downarrow A \downarrow B$

(15) $A \downarrow A \downarrow A \downarrow A \downarrow A \downarrow A$

¿Qué pensar de tales escrituras?
Naturalmente que es más rápido escribir $\bar{A} \triangle B$ que:

---

(1) Debido a Peirce: la operación es llamada a veces «extersección».

(2) Debido a Sheffer.

$$A \downarrow A \quad \Big\downarrow \quad B \downarrow B \quad \Big\downarrow \quad A \downarrow B \quad \Bigg\downarrow \quad A \downarrow A \quad \Big\downarrow \quad B \downarrow B \quad \Big\downarrow \quad A \downarrow B$$

Además, no nos proponemos seguir a Peirce ni a Sheffer y nadie lo ha hecho.
Pero suponed que las «operaciones» sean mecanizables. En este caso, un mecanismo fundamental ($\downarrow$) permitirá construir los demás mecanismos operatorios por asociaciones cada vez más complejas. Tendríamos una operación-átomo que nos permitiría formar todas las moléculas. Este resultado es interesante. Volveremos a él.

13. Dualidad interna

Escribimos, comparando línea por línea, las propiedades relativas a la intersección y a la unión:

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap (B \cup C)$	$A \cup (B \cap C)$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup R = R$
$A \cap R = A$	$A \cup \varnothing = A$
$A \cap \bar{A} = \varnothing$	$A \cup \bar{A} = R$
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap \bar{B} = \varnothing)$	$(A \supset B) \Leftrightarrow (A \cup \bar{B} = R)$
etc...	etc...

Pasamos de una columna a otra efectuando las siguientes sustituciones de signos:

$$\begin{array}{ccc} \cap & \rightarrow & \cup \\ \cup & \rightarrow & \cap \\ \varnothing & \rightarrow & R \\ R & \rightarrow & \varnothing \\ \subset & \rightarrow & \supset \end{array}$$

Y vemos que la álgebra escrita con los cinco signos:
$\cap$, $\cup$, $\varnothing$, R, $\subset$
es la misma que la escrita con los cinco signos: $\cup$, $\cap$, R, $\varnothing$, $\supset$
La permutación $\begin{pmatrix} \cap & \cup & \varnothing & R & \subset \\ \cup & \cap & R & \varnothing & \supset \end{pmatrix}$ conserva los enunciados tautológicos del álgebra de conjuntos.

Estas dos álgebras tienen la misma estructura. Toda proposición establecida en una álgebra puede traducirse inmediatamente a la otra.
Tal situación (igualdad de dos estructuras) en el interior de un mismo conjunto se llama **automorfismo.**

¿En qué consistirá el siguiente paso de abstracción?
En esto: en lugar de dar a estos cinco signos el significado concreto de las operaciones, tal como las hemos definido inicialmente, bastaría estudiar una álgebra con cinco signos, que poseyera las mismas propiedades de escritura, pero en la que no nos preocupáramos del significado.
Los resultados obtenidos podrían, posteriormente, traducirse en una o en otra de las interpretaciones semánticas de los signos utilizados.

14. Vuelta a nuestras antiguas «representaciones gráficas»

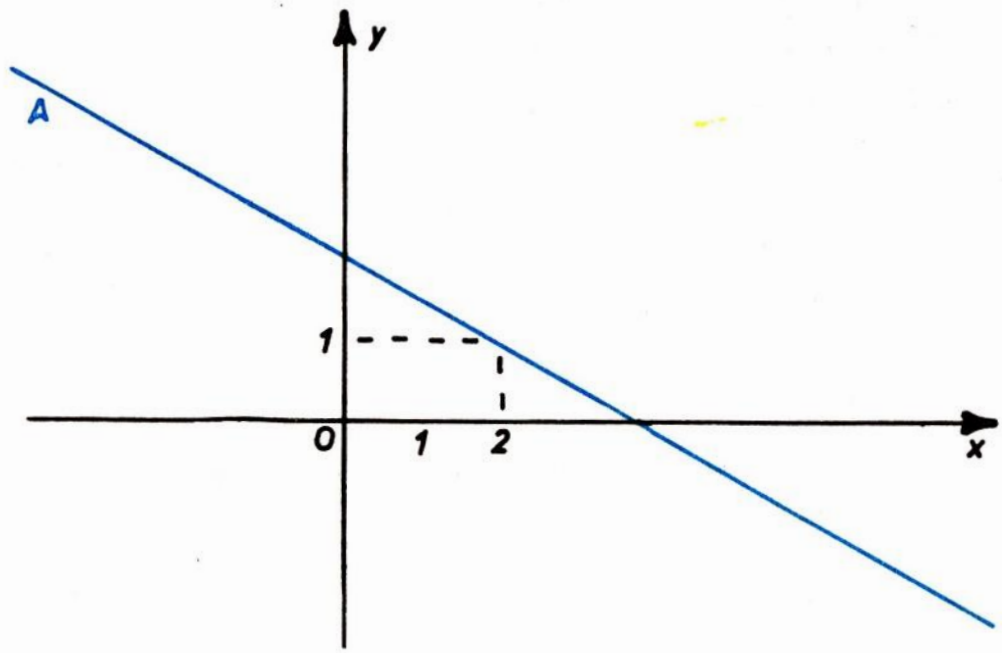
Para recapitular, vamos a volver a tomar un tipo de razonamiento algebraico encontrado hacia los quince años, pero para el que utilizaremos nuestro nuevo lenguaje.
Sea la ecuación:

$$2x + 3y = 7$$

donde x e y son dos números reales.
Las soluciones de esta ecuación son todas las parejas de números reales que verifiquen la igualdad. Estas soluciones forman un conjunto A.

$$A = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 2x + 3y = 7 \right\} \text{donde} \begin{matrix} x \subset \mathbb{R} \\ y \subset \mathbb{R} \end{matrix}$$

Sabemos que tal conjunto puede representarse por el conjunto de puntos de una recta referida a un sistema de ejes.



Si llamamos π al conjunto de puntos del plano (o al conjunto de parejas de números reales) podemos escribir que:

$\pi \setminus A$ representa a $2x + 3y \neq 7$

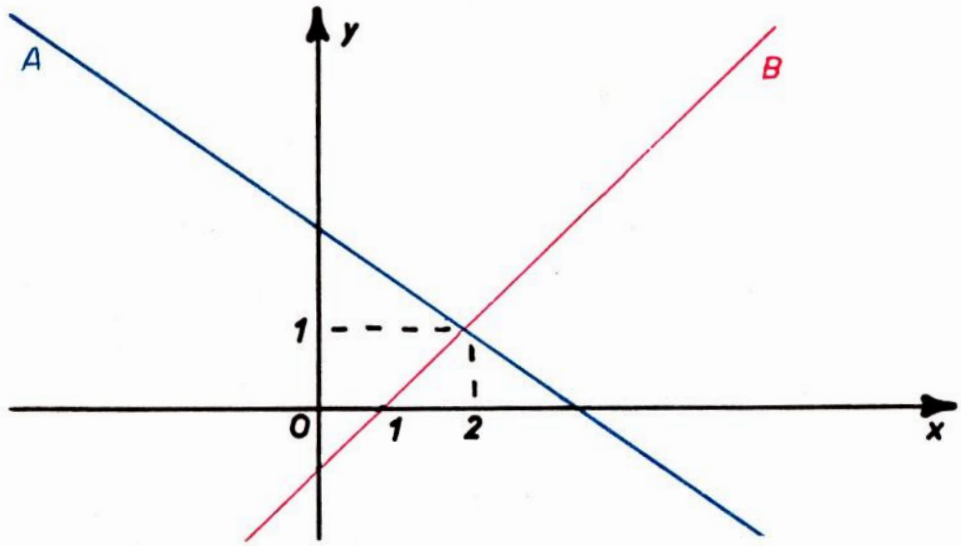
$\pi \setminus A = \{(x, y) \mid 2x + 3y \neq 7\}$.

Demos una segunda ecuación:

$x - y = 1$

y asociémosle la recta B:

$$B = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x - y = 1 \right\} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}$$



«Resolver» el sistema $\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{array}$

es buscar la intersección de los dos conjuntos de soluciones.
Tendremos:

$\{(2, 1)\} = A \cap B$ (es decir, la intersección de las dos rectas).

Pero podemos igualmente «resolver»:

$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y \neq 1 \end{cases}$ que da $A \setminus B$

$\begin{cases} 2x + 3y \neq 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ que da $B \setminus A$

$\begin{cases} 2x + 3y \neq 7 \\ x - y \neq 1 \end{cases}$ que da $\pi \setminus (A \cup B)$ o también $\overline{A} \cap \overline{B}$

$(2x + 3y - 7)(x - y - 1) = 0$ que da $A \cup B$ (es decir, la unión de las dos rectas)

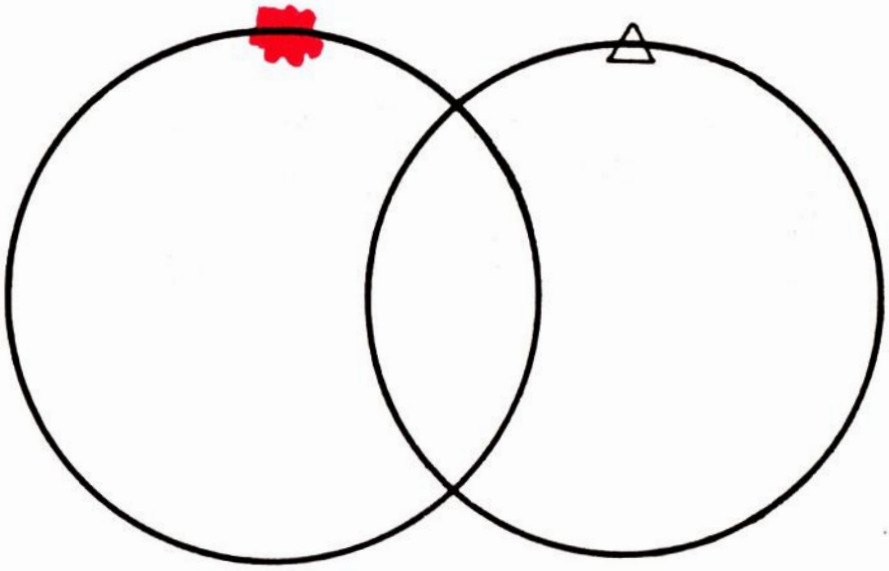
$(2x + 3y - 7)(x - y - 1) \neq 0$ que da $\pi \setminus (A \cup B)$

y encontramos la equivalencia:

$$\begin{cases} 2x + 3y \neq 7 \\ x - y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (2x + 3y - 7)(x - y - 1) \neq 0$$

15. Bloques lógicos

Los pedagogos han inventado múltiples juegos destinados a familiarizar a los niños con las operaciones que hemos descrito.
Veamos el juego de los bloques lógicos debido a Dienes:
el referencial está formado por piezas de madera,
diferentes por la forma: cuadrado, rectángulo, triángulo, círculo;
diferentes por el color: rojo, amarillo, azul;
diferentes por el tamaño: grande, pequeño;
diferentes por el espesor: grueso, delgado.
Los niños están familiarizados con «clasificaciones».
Por ejemplo, en dos círculos colocados en el suelo, se ha puesto la etiqueta y la etiqueta △. Los niños deben, en equipo, clasificar todas las piezas del juego.

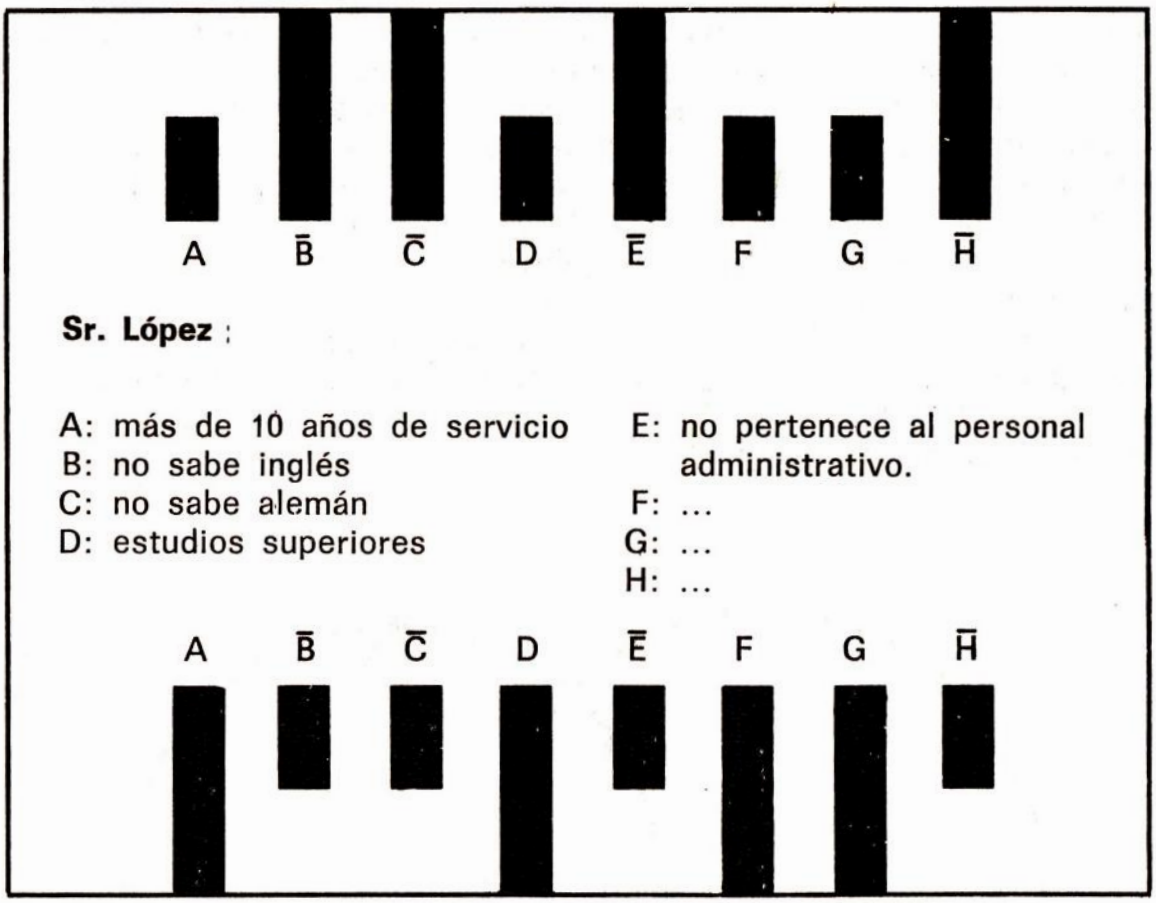


Muy joven, incluso antes de saber leer, el niño aprende a conceptualizar las operaciones fundamentales.
Una variedad de juegos progresivos le llevará a conocer estructuras cada vez más complejas.

16. Fichas lógicas (tarjetas perforadas)

Las tarjetas perforadas utilizadas cada vez más para todas las clasificaciones, dan un excelente ejemplo de estructura operatoria con los conjuntos.

Recordemos que una ficha se representa bajo la siguiente forma:



Una ficha que tiene ocho perforaciones suministra $2^8 = 256$ caracterizaciones posibles.

Supongamos que caracterizamos un personal de empresa según las propiedades siguientes:

A: más de diez años en activo en la casa
B: sabe inglés
C: sabe alemán
D: estudios superiores
E: pertenece al personal administrativo
etc.

Supongamos un fichero de la manera siguiente.

Una plantilla permite sacar todas las fichas que responden a una cierta característica y separarlas en dos conjuntos:

A: los que trabajan desde hace más de 10 años en la empresa;
$\bar{A}$: los que trabajan desde hace menos de 10 años en la empresa.

Las plantillas pueden ser utilizadas sucesivamente (en serie). Después de tres pasadas, las fichas estarán separadas según la partición:

$$\{A \cap B \cap C,\ A \cap B \cap \bar{C},\ A \cap \bar{B} \cap C,\ A \cap \bar{B} \cap \bar{C},\ \bar{A} \cap B \cap C,\ \bar{A} \cap B \cap \bar{C},\ \bar{A} \cap \bar{B} \cap C,\ \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}\},\ \text{etc...}$$

Las plantillas pueden ser utilizadas simultáneamente (en paralelo). Esto permitirá formar las uniones $A \cup B$, y ...; e igualmente sus complementos $\overline{A} \cap \overline{B}$, etc.
Si en el borde paralelo inferior se marcan unas perforaciones con el código opuesto, se multiplican las posibilidades de utilización rápida de las fichas para la formación de todos los subconjuntos.
Los dispositivos para perforaciones serán reemplazados por órganos electrónicos en las memorias de los ordenadores.

4

LA LOGICA COMO UNA ALGEBRA DE ENUNCIADOS

El niño no está bien. Llora.
«No está bien», dice la madre. Y se acerca al niño.
Al niño le gusta tener a su madre cerca de él. Llora.
«No está bien», dice la madre. Y se acerca al niño.
Al niño le gusta tener a su madre cerca de él. Llora.
«Está bien», dice la madre, «pero quiere que esté a su lado». Y no se acerca al niño.

1. El enunciado, elemento de una álgebra

1.1

«Señora, hace mucho viento, y he matado seis lobos.»

(Victor Hugo: *Ruy Blas,* acto II.)

Así Carlos II, rey de España, el eterno moribundo, escribía a la reina, su esposa. Y la pobre reina se lamentaba de la sequedad de su mensaje.

No obstante, este rey, tan privado de elocuencia y de lirismo, efectuaba ya una operación mental de una gran complejidad: con dos enunciados formaba una frase.

Y así él, tan piadosamente y tan escrupulosamente rey, se arriesgaba a muchas mentiras.

1.2

Llamemos p al enunciado «hace mucho viento».
Llamemos q al enunciado «he matado seis lobos».
El mensaje del rey diría: «Señora, p y q».
Olvidemos «Señora», simple indicación de la persona a la que se dirige el mensaje. Se reduce, pues, a «p y q».
Cada uno de los dos enunciados puede ser: { verdadero / falso

y de la misma manera, la frase formada por estos dos enunciados.
¿Cuáles eran, para el rey, los riesgos de mentir a la reina?

Si no hacía mucho viento,
si hacía poco viento,
si no hacía nada de viento,
etc.

Si el enunciado p era falso; el enunciado «p y q» era también falso.

Si el rey no había matado seis lobos,
si el rey había matado tres lobos,
si el rey había matado diez lobos,
si el rey había matado seis zorros,
si el rey había herido a seis lobos,
si el rey no había matado nada,
etc.

Si el enunciado q era falso; el enunciado «p y q» era falso también.
Agrupando todas estas posibilidades:

hacía mucho viento
y : el rey mentía
el rey no había matado seis lobos

no hacía mucho viento
y : el rey mentía
el rey había matado seis lobos

no hacía mucho viento
y : el rey mentía
el rey no había matado seis lobos

hacía mucho viento
y : el rey decía la verdad
el rey había matado seis lobos

Dicho de otra manera, el enunciado «p y q» es verdadero o falso según los valores de verdad o de falsedad del enunciado p y del enunciado q, que después de lo visto queda en forma de tabla:

p	q	p y q
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	V	V

1.3

Analicemos más de cerca cómo Carlos II construyó su enunciado.
Disponía del conjunto de todos los enunciados susceptibles de ser formulados en nuestra lengua.
Eligió **dos** de estos enunciados; formó **un tercer** enunciado.
En otras palabras, construyó una **operación** con el conjunto de los enunciados de nuestra lengua.
Tal operación se llama operación **lógica** o **sintáctica.**
Una operación sintáctica consiste en formar un tercer enunciado a partir de dos enunciados dados.
Hay, pues, una **álgebra de enunciados** como hay una álgebra de conjuntos, una álgebra de números, una álgebra de puntos, una álgebra de vectores, etc.

2. Enunciados, lexis y condiciones

2.1

Esta álgebra de los enunciados la podemos considerar teniendo en cuenta la forma de los enunciados. Será entonces una álgebra sintáctica, es decir, una parte de lo que se llama tradicionalmente «la gramática».
Podemos, igualmente, considerarla haciendo abstracción de la forma de los enunciados; asimilando los enunciados a «objetos» iniciales, susceptibles de formar nuevos enunciados por medio de diversas operaciones. Es preciso, pues, definir lo que entendemos por «enunciado».
Un enunciado es un objeto (1) provisto de un valor **(verdadero** o **falso).**
Como se trata de dos valores, los representaremos por dos signos, generalmente por 1 y 0.
La lógica es el álgebra de los enunciados considerados desde el punto de vista de su valor de verdad o falsedad.

2.2

Sean los enunciados:

verdadero: p = «la torre Eiffel está en París»,
verdadero: q = «Luis XIV murió en 1715»,
falso: r = «Napoleón I ganó la batalla de Waterloo»,
falso: s = «la luna es cúbica».

---

(1) «Objeto» debe ser entendido, en el sentido dado en el capítulo I, como «cualquier cosa que puede participar en la formación de un conjunto». No se trata necesariamente de un objeto material.

Los enunciados que tienen el mismo valor de verdad o falsedad se llaman **equivalentes.**

Así: $p \Leftrightarrow q$ $\quad r \Leftrightarrow s$ $\quad p \not\Leftrightarrow r$ (1)

2.3

Llamamos »lexis» a un enunciado no actualizado por un valor de verdad o falsedad.

Por ejemplo:

«el hecho de que el comediante Shakespeare haya escrito Hamlet»;
«el descubrimiento de América por Leyf Erikson»;
«descubrir América»;
«si Enriqueta de Inglaterra fue envenenada»;
«si Julio César estuvo en Gran Bretaña»;

son lexis.

Generalmente, en nuestra lengua, actualizamos los lexis dándoles un valor.

Por ejemplo:

«el comediante Shakespeare escribió Hamlet»;
«el comediante Shakespeare no escribió Hamlet»;
«es probable que el comediante Shakespeare haya escrito Hamlet»;
«escribir Hamlet parece imposible para el comediante Shakespeare».

El álgebra lógica hace abstracción del contenido de los lexis para no conservar más que el valor de los enunciados.

2.4

Sea:

«x es un número primo».

Esta forma no es un enunciado, pues no posee valor de verdad o falsedad. Sin embargo, si sustituimos la x por un objeto cualquiera, la forma se convertirá en un enunciado:

x = 5	5	es un número primo	verdadero
x = 10	10	es un número primo	falso
x = la luna	la luna	es un número primo	falso

Llamamos a esta expresión **condición** o también **función proposicional.** La representamos por p(x).

p(5) es verdadero $\quad$ p(10) es falso $\quad$ p(la luna) es falso.

---

(1) $\Leftrightarrow$ se lee «es equivalente a».
$\not\Leftrightarrow$ se lee «no es equivalente a».

Si sustituimos x por todos los objetos de un cierto referencial, podemos separar estos objetos en dos conjuntos:

los que hacen p(x) verdadero,

los que hacen p(x) falso.

Una condición (o función proposicional) **define un conjunto en todo referencial.**

$E = \{x \mid f(x)\}$.

Por ejemplo:

$E_1 = \{x \mid x \text{ es primo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$

$E_2 = \{p \in \pi \mid \text{distancia } ap = 3 \text{ cm}\}$

= circunferencia de centro a y de un radio de 3 cm.

$$E_3 = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{x es frances} \\ \text{y edad de } x \geqslant 21 \\ \text{x es soltero} \\ \text{y x está vivo} \end{array} \right\}$$ = los franceses vivos, mayores de edad y solteros.

Etc.

3. Álgebra lógica de los enunciados

3.1

Negación

Hace mucho viento. No hace mucho viento.

Si uno de estos enunciados es falso, el otro es verdadero, y recíprocamente. Cada uno es la **negación** del otro.

Escribiremos [1]:

negación de $p = \tilde{p}$

La tabla de valores es

p	1	0
$\tilde{p}$	0	1

Principio de doble negación: $\tilde{\tilde{p}} \Leftrightarrow p$

Por ejemplo:

es falso que no hace mucho viento

es equivalente a decir que

hace mucho viento.

Observamos aquí que, en el lenguaje, dos formas diferentes expresan siempre una diferencia de sentido. Que la doble negación se reduce a la afirmación es, por tanto, una simplificación; algunos lógicos lo encuentran abusivo.

3.2

Conjunción (o producto lógico).

(1) Hay quien escribe: $\sim p$, Np, no p, $\bar{p}$.

3.2.1

Es la operación utilizada por Carlos II, en su engañosa carta a la reina. Corresponde, en general, al empleo de la conjunción «y»,

«p y q».

Escribiremos: **conjunción (p, q) = p ∧ q**

La tabla de valores puede ser presentada de varias maneras:

p \ q	1	0
1	1	0
0	0	0

o bien

p	∧	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

o bien

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
p ∧ q	1	0	0	0

3.2.2

p ∧ p ⇔ p idempotencia de ∧

«llueve» y «llueve» es equivalente a «llueve».

3.2.3

p ∧ q ⇔ q ∧ p conmutatividad de ∧

3.2.4

(p ∧ q) ∧ r ⇔ p ∧ (q ∧ r) asociatividad de ∧

Como ejemplo demostramos esta propiedad.
Esto os proporcionará un método de demostración para las otras propiedades.
La demostración puede hacerse de dos maneras:

(p	∧	q)	∧	r	= p	∧	(q	∧	r)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2 columnas idénticas

p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
r	1	0	1	0	1	0	1	0
$p \wedge q$	1	1	0	0	0	0	0	0
$(p \wedge q) \wedge r$	1	0	0	0	0	0	0	0
$q \wedge r$	1	0	0	0	1	0	0	0
$p \wedge (q \wedge r)$	1	0	0	0	0	0	0	0

2 líneas de valores idénticas

La conmutatividad y la asociatividad de $\wedge$ nos permiten escribir: $p \wedge q \wedge r$.

3.3

Contradicción (o inepcia).

¿Qué valores puede tomar un enunciado como $p \wedge \tilde{p}$?

Su tabla de valores es:

p	1	0
$\tilde{p}$	0	1
$p \wedge \tilde{p}$	0	0

El enunciado $p \wedge \tilde{p}$ es falso cualquiera que sea p.

Un enunciado compuesto, que es falso para cualesquiera que sean los valores de los enunciados que lo forman, se llama contradicción (o inepcia).

Se escribe inepcia $= \mathcal{J}$

Ejemplos:

llueve y no llueve;
este número natural es par e impar;
este punto pertenece y no pertenece a esta recta;
etc.

Se verifica siempre que $\mathcal{J} \Leftrightarrow \mathcal{J}'$

Todas las inepcias son equivalentes. Desde el punto de vista lógico, **sólo hay una inepcia.**

3.4

Evidencia (o tautología).

Si $\mathcal{J}$ es falso para cualesquiera que sean los valores de los enunciados que lo forman, entonces $\tilde{\mathcal{J}}$ es verdadero para cualquier valor de los enunciados que lo forman.

Un enunciado compuesto, verdadero para cualquier valor de los enunciados que lo forman, se llama evidencia (o tautología) (1).

---

(1) Con palabras vulgares se diría que es una perogrullada o, como se dice en francés, una *lapalissade* (de La Palisse).
Sin embargo,

«Un cuarto de hora antes de morirse,
La Palisse estaba todavía vivo»

no aparece como una evidencia. Si, en efecto, La Palisse designa a un niño que ha nacido muerto, la copla de la canción es un enunciado falso.

Se escribe: tautología = $\mathfrak{T}$

Ejemplos:

este número natural es par o impar;
este niño es un chico o una chica;
este punto pertenece o no pertenece a la circunferencia.

Se verifica siempre que $\mathfrak{T} \Leftrightarrow \check{\mathfrak{T}}'$.

Todas las tautologías son equivalentes. Desde el punto de vista lógico, **sólo hay una tautología**

Se tiene $\mathfrak{J} \Leftrightarrow \check{\mathfrak{T}}$ $\mathfrak{T}' \Leftrightarrow \check{\mathfrak{J}}$

La negación de la inepcia es la tautología y recíprocamente.

3.5

Vuelta a la conjunción.

Podemos completar las propiedades del producto lógico (conjunción) utilizando la tautología y la inepcia.

Se verifica siempre que $p \wedge \check{p} = \mathfrak{J}$

La tautología es neutra para $\wedge$.

$p \wedge \mathfrak{T} = p$

La inepcia es absorbente para $\wedge$.

$p \wedge \mathfrak{J} = \mathfrak{J}$

3.6

Disyunción (o suma lógica)

3.6.1

Consideremos el enunciado:

«Los condenados pagarán una multa o serán encarcelados».

Se puede interpretar admitiendo la realización simultánea de estas dos posibilidades:

— pagar una multa,
— sufrir un encarcelamiento.

Se puede interpretar excluyendo la realización simultánea de las dos posibilidades.

Para evitar esta ambigüedad, el lenguaje jurídico emplea, por una parte, la conjunción híbrida «y/o» y, por otra parte, la conjunción «sea... sea» (o también «o bien... o bien»).

El enunciado:

«Los condenados pagarán una multa y/o serán encarcelados»

corresponde a la **disyunción** o **suma lógica** de dos enunciados.

Este complejo enunciado significa que:

o bien

un condenado paga la multa **y** es encarcelado;

o bien

un condenado paga la multa **y no es** encarcelado;

o bien

un condenado **no** paga la multa **y** es encarcelado.

Este enunciado es falso tan pronto como:

un condenado **no** paga la multa **y no** es encarcelado.

3.6.2

Escribiremos: **disyunción (p, q) = p ∨ q**

Su tabla de valores es:

p \ q	1	0
1	1	1
0	1	0

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
p ∨ q	1	1	1	0

3.6.3

Se verifica siempre que:

$p \vee p \Leftrightarrow p$	idempotencia de ∨
$p \vee \mathcal{J} \Leftrightarrow p$	$\mathcal{J}$ es neutro para ∨
$p \vee \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{T}$	$\mathcal{T}$ es absorbente para ∨
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	conmutatividad de ∨
$p \vee \tilde{p} \Leftrightarrow \mathcal{T}$	
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	asociatividad de ∨

La conmutatividad y la asociatividad de ∨ permiten escribir:

$$p \vee q \vee r.$$

3.7

Relaciones entre disyunción y conjunción.

3.7.1

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

∧ y ∨ son recíprocamente distributivas.

Por ejemplo:

«hace mucho viento y he matado seis lobos y/o he cogido un resfriado»

es equivalente a:

«hace mucho viento y he matado seis lobos» y/o

«hace mucho viento y he cogido un resfriado»;

y está claro lo que llega a ser el lenguaje usual cuando se intentan algunos pequeños cambios elementales.

Demostremos la primera igualdad, dejando como ejercicio la demostración de la segunda:

p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
r	1	0	1	0	1	0	1	0
$q \vee r$	1	1	1	0	1	1	1	0
$p \wedge (q \vee r)$	1	1	1	0	0	0	0	0
$p \wedge q$	1	1	0	0	0	0	0	0
$p \wedge r$	1	0	1	0	0	0	0	0
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	1	1	1	0	0	0	0	0

2 líneas de valores idénticas

3.7.2

$$\widetilde{p \wedge q} \Leftrightarrow \tilde{p} \vee \tilde{q}$$
$$\widetilde{p \vee q} \Leftrightarrow \tilde{p} \wedge \tilde{q}$$

$\sim$ es antidistributiva con respecto a $\wedge$ y $\vee$.

Vemos que $\wedge$ en función de $\vee$ y $\sim$
$\vee$ en función de $\wedge$ y $\sim$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \widetilde{\tilde{p} \vee \tilde{q}}$$
$$p \vee q \Leftrightarrow \widetilde{\tilde{p} \wedge \tilde{q}}$$

Demostremos una de estas relaciones:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \vee q$	1	1	1	0
$\tilde{p}$	0	0	1	1
$\tilde{q}$	0	1	0	1
$\tilde{p} \vee \tilde{q}$	0	1	1	1
$\widetilde{\tilde{p} \vee \tilde{q}}$	1	1	1	0

2 líneas de valores idénticas

Traduciendo esto al lenguaje usual sería:

«hace mucho viento y he matado seis lobos»

que es equivalente a:

«es falso que no hace mucho viento y que no he matado seis lobos».

El sentido se pierde en las sinuosidades de la frase, y eso que solamente tratamos composiciones sencillas.

Intentemos traducir al lenguaje usual la operación:

$$\sim \left[p \vee [(\tilde{q} \vee \tilde{r}) \wedge q]\right] \vee (p \wedge q \wedge r)$$

siendo

p = hace mucho viento
q = he matado seis lobos
r = he cogido un resfriado

y tratad de demostrar que el resultado es equivalente a:

$$(p \wedge r) \vee [(p \otimes q) \wedge \check{r}]$$

siendo $\otimes$ = sea... sea...

Es tan lógico como aritmético. En vez de reunir bisontes en los parques para contarlos, es más cómodo utilizar las bolas del ábaco o las cifras de la numeración. El álgebra de los enunciados permite manipulaciones lingüísticas que sobrepasan el lenguaje usual. Y esto especialmente en el lenguaje que pone en contacto al hombre con ese nuevo interlocutor: el ordenador.

3.8

Disyunción exclusiva.

La «disyunción exclusiva» de dos enunciados corresponde al empleo de la conjunción sea... sea... (o bien... o bien...);

ej.: «O bien el condenado pagará la multa, o bien será encarcelado».

Esto excluye la realización simultánea de las dos posibilidades.

Representaremos esta operación por $p \otimes q$.

Su tabla de valores viene dada por:

p \ q	1	0
1	0	1
0	1	0

o

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \otimes q$	0	1	1	0

Y tendremos las propiedades:

$$p \otimes q = (p \wedge \tilde{q}) \vee (\tilde{p} \wedge q)$$
$$p \otimes p = \mathcal{J}$$
$$p \otimes \mathcal{J} = p$$
$$p \otimes \bar{p} = \mathcal{T}$$
$$p \otimes q = q \otimes p$$
$$p \otimes (q \otimes r) = p \otimes (q \otimes r)$$

4. Conjunto de operaciones lógicas

4.1

Formación de las 16 operaciones.

Podemos construir la tabla de las dieciséis operaciones lógicas posibles con dos enunciados.

Escribimos al principio de cada columna cada uno de los cuatro minitérminos:

$$p \wedge q,\ p \wedge \tilde{q},\ \tilde{p} \wedge q,\ \tilde{p} \wedge \tilde{q}$$

Formamos la suma lógica de estos minitérminos indicando por 1 si participan en esta suma lógica.

Obtenemos 16 posibilidades:

Número de orden	$p \wedge q$	$p \wedge \tilde{q}$	$\tilde{p} \wedge q$	$\tilde{p} \wedge \tilde{q}$	Enunciado formado por suma lógica
0	0	0	0	0	$\mathcal{J}$
1	0	0	0	1	$\tilde{p} \wedge \tilde{q}$
2	0	0	1	0	$\tilde{p} \wedge q$
3	0	0	1	1	$\tilde{p}$
4	0	1	0	0	$p \wedge \tilde{q}$
5	0	1	0	1	$\tilde{q}$
6	0	1	1	0	$p \otimes q$
7	0	1	1	1	$\tilde{p} \vee \tilde{q}$
8	1	0	0	0	$p \wedge q$
9	1	0	0	1	$\tilde{p} \otimes q \Leftrightarrow p \otimes \tilde{q}$
10	1	0	1	0	q
11	1	0	1	1	$\tilde{p} \vee q$
12	1	1	0	0	p
13	1	1	0	1	$p \vee \tilde{q}$
14	1	1	1	0	$p \vee q$
15	1	1	1	1	$\mathcal{T}$

4.2

Isomorfismo entre el álgebra de los conjuntos y el álgebra de los enunciados.

Si comparamos las propiedades obtenidas en el álgebra de los conjuntos (cap. III) y en el álgebra de los enunciados (cap. IV), nos damos cuenta de que pasamos de una a otra por una simple sustitución de vocabulario:

conjuntos	enunciados
conjunto vacío	inepcia
referencial	tautología
unión	disyunción
intersección	conjunción
diferencia simétrica	disyunción exclusiva
complementación	negación

La sustitución $\begin{pmatrix} \cap & \cup & - & \varnothing & \mathbb{R} \\ \wedge & \vee & \sim & \mathcal{J} & \mathcal{T} \end{pmatrix}$ establece un **isomorfismo** entre el álgebra de los conjuntos y el álgebra de los enunciados.

Y, por otra parte, las sustituciones

$$\begin{pmatrix} \cap & \cup & - & \varnothing & \mathbb{R} \\ \cup & \cap & - & \mathbb{R} & \varnothing \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} \wedge & \vee & \sim & \mathcal{J} & \mathcal{T} \\ \vee & \wedge & \sim & \mathcal{T} & \mathcal{J} \end{pmatrix}$$

establecen un **automorfismo**

en el álgebra de los conjuntos	en el álgebra de los enunciados

También podemos construir las 16 operaciones partiendo de una de ellas:

Sea:
$A \downarrow B = \overline{A} \cap \overline{B}$
Sea:
$A \uparrow B = \overline{A} \cup \overline{B}$

Sea:
$p \downarrow q = \tilde{p} \wedge \tilde{q}$ (Peirce)
Sea:
$p \uparrow q = \tilde{p} \vee \tilde{q}$ (Scheiffer)

Podemos, finalmente, construir una álgebra más abstracta que contiene cinco signos de escritura (en vez de objetos). Sería a la vez una álgebra de conjuntos y una álgebra de enunciados. Es el álgebra de Boole ([1]).

4.3

Veamos una álgebra de Boole, que vamos a formar con dos operaciones bastante parecidas a las que la aritmética tradicional os ha enseñado, pero cuya estructura va a abarcar al álgebra de conjuntos, al álgebra de enunciados e incluso a la de los circuitos electrónicos.
Las variables son x, y, z.
Estas variables no pueden tomar más que dos valores {0, 1}.
Utilizaremos los tres signos: +, ·, — (con el mismo sentido que la aritmética tradicional).
Asociamos:

$A \cap B$, $p \wedge q$ a $x \cdot y$ (producto booleano)
tabla

x \ y	1	0
1	1	0
0	0	0

propiedades:

$x \,.\, y = y \,.\, x$
$x \,.\, (y \,.\, z) = (x \,.\, y) \,.\, z$
$x \,.\, 0 = 0$
$x \,.\, 1 = x$
$x \,.\, x = x$

Asociamos:

$A \cup B$, $p \vee q$ a $x + y - x \cdot y$ (suma booleana)
tabla

x \ y	1	0
1	1	1
1	1	0

(1) Jorge Boole: 1815-1864. Hijo de un tendero de Lincoln, logró alcanzar un título universitario a pesar de las trabas sociales de la Inglaterra victoriana. Profesor en el colegio de Cork (Irlanda). Creador (con Morgan) de la lógica moderna. Publicó «Las leyes del pensamiento» en 1854.

propiedades: $x + y - x \cdot y = y + x - y \cdot x$

$x + 0 - x \cdot 0 = x$

$x + 1 - x = 1$

etc...

Asociamos:

$\bar{A}$, $\tilde{p}$ a $1 - x$ (diferencia booleana)

ley de Boole $(1 - x) \cdot (1 - y) = 1 - (x + y - xy)$

etc.

Todos los cálculos de la lógica podrían efectuarse con este nuevo sistema de escritura.

4.4

Podemos ahora enseñaros una llave maestra que os abrirá el templo de la matemática moderna.

> Formas distintas (escritura, palabras) pueden encubrir estructuras comunes.
> Objetos distintos, a los que son aplicadas operaciones materialmente diferentes, pueden ser descritos con un lenguaje común.
> La matemática es el lenguaje más económico que cubre la más amplia realidad posible.

5. La implicación

Hasta aquí, conjuntos y enunciados poseían las mismas propiedades. A partir de ahora, las dos álgebras van a diferir. Veremos por qué.

5.1

«Si llueve, me pongo el sombrero.»

Este enunciado no significa de ningún modo:

«llueve»,

o

«me pongo el sombrero»;

expresa una dependencia entre dos lexis y llamaremos a esta dependencia **implicación.**

Escribiremos:

$$p \text{ implica } q = p \Rightarrow q$$

5.2

Me encontráis y llevo sombrero; llueva o no llueva, la implicación permanece verdadera. Jamás he dicho que llevaba sombrero sólo en caso de lluvia.

Si me encontráis un día que no llueve, lleve o no lleve sombrero, la implicación permanece verdadera. Jamás he dicho lo que haría en caso de buen tiempo.

La única situación que puede invalidar la implicación (probar que es falsa) sería que me encontraseis cuando llueve y yo no llevase sombrero.

$p \Rightarrow q$ es falsa cuando p es verdadera y q es falsa,
es verdadera en cualquier otro caso.

Por lo tanto, la tabla es:

p \ q	1	0
1	1	0
0	1	1

o también

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \Rightarrow q$	1	0	1	1

5.3

Se verifica siempre que: $\mathbf{p \Rightarrow p}$ reflexividad

$\mathbf{(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\tilde{q} \Rightarrow \tilde{p})}$ contraposición

Ejemplos:

«si llueve, me pongo el sombrero»

es equivalente a:

«si no me pongo el sombrero es que no llueve»

«un múltiplo de 6 es múltiplo de 3»

es equivalente a:

«un no múltiplo de 3 no es múltiplo de 6»

etc.

$\tilde{q} \Rightarrow \tilde{p}$ es la **contrarrecíproca** de $p \Rightarrow q$.

Demostremos la propiedad de contraposición:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \Rightarrow q$	1	0	1	1
$\tilde{q}$	0	1	0	1
$\tilde{p}$	0	0	1	1
$\tilde{q} \Rightarrow \tilde{p}$	1	0	1	1

2 líneas de valores idénticas

$$\mathbf{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)}$$

la inclusión es transitiva;

demostración:

p	1	1	1	1	0	0	0	0	
q	1	1	0	0	1	1	0	0	
r	1	0	1	0	1	0	1	0	
$p \Rightarrow q$	1	1	0	0	1	1	1	1	
$q \Rightarrow r$	1	0	1	1	1	0	1	1	
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	1	0	0	0	1	0	1	1	
$p \Rightarrow r$	1	0	1	0	1	1	1	1	
enunciado a demostrar	1	1	1	1	1	1	1	1	que es $\mathcal{T}$

5.4

Se verifica siempre que:

$$p \Rightarrow \mathcal{T}$$

E incluso tenemos una notación para expresar este sempiterno «se verifica siempre que»

$$(p \Rightarrow \mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathcal{T}$$

Análogamente:

$$(\mathcal{I} \Rightarrow p) \Leftrightarrow \mathcal{T}$$

que se traduce por:

la inepcia implica cualquier enunciado.

5.5

Se verifica siempre que:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\tilde{p} \vee q)$$

Demostración:

p	1	1	0	0	
q	1	0	1	0	
$p \Rightarrow q$	1	0	1	1	dos líneas
$\bar{p}$	0	0	1	1	de valores
$\bar{p} \vee q$	1	0	1	1	idénticas

5.6

Psicológicamente, la implicación es a veces difícil de aceptar. Se admite que

lo verdadero implica lo verdadero,
lo falso implica lo falso.

Es dudoso que lo falso pueda implicar lo verdadero.
Veamos dos ejemplos que nos ayudarán a comprenderlo.

5.6.1

En este lote hay 40 libros a 50 ptas. cada uno. El lote de libros cuesta 2000 ptas.
Digo:
hay 40 libros a 50 ptas. (verdadero); luego el precio del lote es de 2000 ptas. (verdadero); mi deducción es exacta;
hay 50 libros a 40 ptas. (falso); luego el precio del lote es de 2000 pesetas (verdadero); mi deducción es exacta;

hay 45 libros a 60 ptas. (falso); luego el precio del lote es de 2700 pesetas (falso); mi deducción es todavía exacta;

hay 40 libros a 50 ptas. (verdadero); luego el precio del lote es de 2500 ptas. (falso); mi deducción es inexacta.

5.6.2

Conocéis la prueba del 9. Nos permite afirmar la **inexactitud** de un cálculo:

la prueba no «pega»; el cálculo está equivocado,

el cálculo es exacto; la prueba «pega».

Pero puede suceder que una prueba «pegue» con un cálculo inexacto. Por ejemplo: en

	7583	prueba	5
	+ 4638		+ 3
	12230		8
	inexacta		exacta

La prueba de los nueves no prueba la exactitud de un cálculo.

5.7

Lo que llama igualmente la atención es que un enunciado falso pueda implicar cualquier enunciado. Por ejemplo:

«la luna es cúbica»

implica

«Shakespeare escribió los Tres Mosqueteros».

En realidad, no vemos la «utilidad» de tal enunciado.

Sin embargo, lo notaremos mejor con las formas del lenguaje real:

«¡si aquél es un profesor, entonces yo soy un molinillo de café!»

(entonces «¡todo es posible, todo se puede creer, todo está permitido!»)

Los lógicos de la Edad Media decían ya:

EX FALSO SEQUITUR QUODLIBET

(de lo falso, sale todo lo que uno quiere).

5.8

Se utiliza más la implicación en formas tales como:

si un número es múltiplo de 9, entonces este número es múltiplo de 3;

si un número es mayor que 5, entonces es mayor que 2;

si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.

Es decir, en la forma:

si $p(x)$, entonces $q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones proposicionales (o condiciones).

La implicación se utiliza, pues, esencialmente en la forma:

$$\forall x \in E : p(x) \Rightarrow q(x)$$

Ejemplo:

Siendo x un triángulo, si x es equilátero, entonces x es isósceles.

Si ponemos:

$$P = \{x \mid q(x)\}$$
$$Q = \{x \mid q(x)\}$$

Tendremos:

$$[\forall x : x \in P \Rightarrow x \in Q] \Leftrightarrow (P \subset Q)$$
$$[\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow (P \subset Q)$$

Tal implicación expresa de hecho una inclusión.

5.9

Quizás os digáis que el isomorfismo entre el álgebra de los conjuntos y el álgebra de los enunciados podría prolongarse a la inclusión y a la implicación.

En efecto:

en los conjuntos	en los enunciados
$\forall P : \varnothing \subset P$	$\forall p : \mathcal{J} \Rightarrow p$
$\forall P : P \subset \mathbb{R}$	$\forall p : p \Rightarrow \mathcal{T}$
$\forall P, Q : (P \subset Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \subset \bar{P})$	$\forall p, q : (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\tilde{q} \Rightarrow \tilde{p})$

Pero:

$\forall P, Q : (P \subset Q) \Leftrightarrow (P \cap \bar{Q} = \varnothing)$	
o también :	
$(P \subset Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \cup Q = \mathbb{R})$	$\forall p, q : (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\tilde{p} \vee q)$

El isomorfismo entre las estructuras conjuntistas y lógicas desaparece en cuanto se comparan la inclusión y la implicación.

La inclusión entre conjuntos no es un conjunto, sino un enunciado.	La inclusión entre enunciados es un enunciado.
Cuando definimos un conjunto, no lo suponemos real o vacío.	Cuando formulamos un enunciado, lo suponemos «verdadero».

Por ejemplo:

«los alumnos que han triunfado» es un conjunto, pero no decimos si es real o vacío.	«Los alumnos han triunfado» es un enunciado que en su formulación se supone «verdadero».

Esta disimetría entre «conjuntos» y «enunciados» limita el isomorfismo entre dos estructuras. Para restablecerlo, bastará definir la implicación entre dos enunciados como:

$$\tilde{p} \vee q = \mathcal{T}$$

«p implica q» y entonces significa que «no $p \vee q$ es una tautología».

Por ejemplo:

«un número natural no es múltiplo de 4 o es múltiplo de 2»

«un número es inferior a 10 o superior a cero»

etc.

6. La equivalencia

La equivalencia es por sí misma una relación entre enunciados (tener el mismo valor) y su expresión nos da un nuevo enunciado:

$$p \Leftrightarrow q$$

Su tabla de valores es:

p \ q	1	0
1	1	0
0	0	1

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \Leftrightarrow q$	1	0	0	1

Se tiene: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Demostración

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \Rightarrow q$	1	0	1	1
$q \Rightarrow p$	1	1	0	1
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	1	0	0	1
$p \Leftrightarrow q$	1	0	0	1

2 líneas de valores idénticas

En el lenguaje corriente, la equivalencia se expresa por «si y sólo si» (que se escribe en matemática **ssi**).

Ejemplo:

Un cuadrilátero es un paralelogramo **ssi** sus diagonales se cortan en su punto medio.

7. La deducción

7.1

La aplicación de un razonamiento a una demostración de geometría, a un cálculo algebraico, a un problema de física nos obliga frecuentemente a transformar un enunciado.

Por ejemplo:

$$5x + 3 = 3x + 7$$
$$5x - 3x = 7 - 3$$

o también:

$$x > 10$$
$$x > 0$$

etc.

El nuevo enunciado debe ser deducible del primero. Es decir, que es preciso que $p \Rightarrow q$, o sea, $\tilde{p} \vee q = \tau$.
(En algún caso particular puede ocurrir que $p \Leftrightarrow q$.)
La deducción se lleva a cabo teniendo en cuenta el conjunto de axiomas que se suponen verdaderos. Si llamamos «α» al enunciado de los axiomas, la deducción impone que:

$(p \wedge \alpha) \Rightarrow q$, es decir, que $\tilde{p} \vee \tilde{\alpha} \vee q = \tau$.

En la formulación tradicional, raramente se indica la naturaleza de la cadena deductiva que une dos enunciados. Como máximo señala a veces una implicación con ayuda de palabras:

«luego, en consecuencia, podemos deducir que resulta que...»

Para ser precisos, habría que señalar la estructura de la deducción.
Por ejemplo:

a) x es un número entero
$\Downarrow$
$x \neq 1/2$

b) el triángulo es equilátero
$\Downarrow$
dos ángulos del triángulo son iguales

c) $x = 1$
$\Downarrow$
$x^2 - 3x + 2 = 0$

d) $x^2 = 9$
$\Updownarrow$
$x \in \{+3, -3\}$

las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio y el cuadrilátero es un paralelogramo.

etc.

7.2

Entre un sistema de axiomas y una conclusión, existe, pues, una cadena de implicaciones o de equivalencias:

$$\alpha \Rightarrow a \Rightarrow b \Leftrightarrow c \Rightarrow d \Leftrightarrow e \ldots \Rightarrow z.$$

El matemático y el lógico no se ocupan más que de la precisión de la cadena de razonamientos.
Supongamos que una deducción nos proporciona un enunciado susceptible de una comprobación experimental.
Por ejemplo:

z = «la lámpara se enciende».

Si, efectivamente, en la realidad experimental la lámpara que observamos se enciende, no podemos concluir de ello que el sistema de axiomas sea verdadero (lo falso puede implicar lo verdadero).
Pero si la lámpara no se enciende, podemos concluir que el sistema de axiomas es falso.
Con otras palabras:

en una cadena deductiva que contiene al menos una implicación,
— una confirmación experimental de la conclusión no prueba la verdad de la hipótesis;

— una invalidación experimental de la conclusión prueba la falsedad de la hipótesis.

7.3

La cadena deductiva $\alpha \Rightarrow z$ es la misma que $\tilde{z} \Rightarrow \tilde{\alpha}$.
Esto nos proporciona el método de demostración «por reducción al absurdo».
Se supone la falsedad de la conclusión. Si se llega a deducir la falsedad de la hipótesis, la cadena deductiva queda comprobada.
Es, más o menos, el camino que siguió Lobatchewsky (1).
En 1885 intentó demostrar el postulado de Euclides: «por un punto dado sólo se puede trazar una paralela a una recta dada».
Lobatchewsky supuso que se podían trazar por lo menos dos paralelas (y por tanto infinitas). Obtuvo así diversas conclusiones, esperando contradecir los axiomas iniciales. No triunfó. Pero, sin embargo, obtuvo tantas y tantas conclusiones, que, al fin, en lugar de demostrar el postulado de Euclides, construyó una geometría no euclidiana, la primera de la historia de la matemática.

8. Los llamados lugares geométricos

8.1

Los lugares geométricos son aún las delicias de muchos profesores. Realzan, por otra parte, la matemática conjuntista.
Conocéis numerosos ejemplos:

— conjunto de puntos equidistantes de dos puntos dados (en el plano: mediatriz del segmento determinado por esos dos puntos);
— conjunto de puntos equidistantes de dos rectas dadas (en el plano: bisectriz del ángulo determinado por esas dos rectas);
— conjunto de puntos p tales como
$(\text{dist } p\ a)^2 + (\text{dist } p\ b)^2 = k^2$
(en el plano: una circunferencia, un punto, o nada).

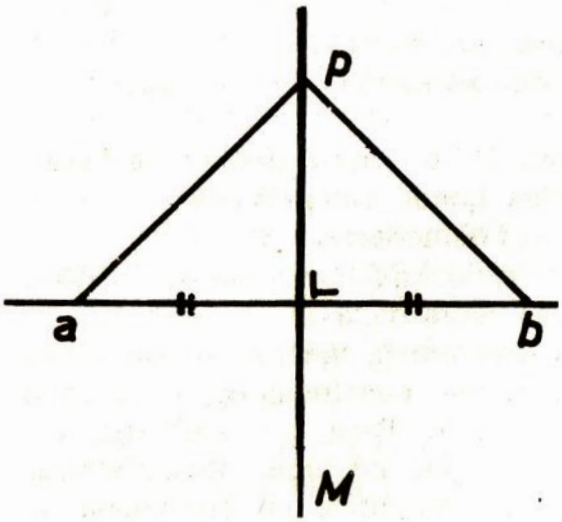
Un «lugar geométrico de puntos» es un conjunto de puntos que satisfacen una condición dada.

$$P = \{ x \mid p(x) \}$$

(1) Nicolas Lobatchewsky, matemático ruso (1793-1856); rector de la Universidad de Kazan, fue el primero, en 2200 años, en abordar en la «Pangeometría» el carácter «absoluto» del sistema euclídeo.

8.2

¿Cómo demostrar que tal ser geométrico es tal lugar?
¿Cómo demostrar, por ejemplo, que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos del segmento?



Es necesario establecer dos implicaciones:

$(p \in M) \Rightarrow (\text{dist } p\ a = \text{dist } p\ b)$ (1)

$(\text{dist } p\ a = \text{dist } p\ b) \Rightarrow (p \in M)$ (2)

Pero cada una de estas implicaciones es equivalente a su contrarrecíproca.

$(p \in M) \Rightarrow (\text{dist } p\ a = \text{dist } p\ b)$ (1)

$(\text{dist } p\ a \neq \text{dist } p\ b) \Rightarrow (p \notin M)$ (1′)

$(\text{dist } p\ a = \text{dist } p\ b) \Rightarrow (p \in M)$ (2)

$(p \notin M) \Rightarrow (\text{dist } p\ a \neq \text{dist } p\ b)$ (2′)

La demostración de la igualdad entre la mediatriz y el lugar puede ser hecha de cuatro maneras distintas:

(1) y (2) o (1′) y (2) o (1) y (2′) o (1′) y (2′)

9. Aplicación lingüística: las conjunciones de coordinación

9.1

Comparemos los enunciados:

p = hace mucho viento **y** he matado seis lobos.
q = los filólogos **y** los matemáticos utilizan la lógica.
r = los alumnos son animosos **y** dispuestos.

En «p» la conjunción **y** expresa indiscutiblemente el **producto lógico** de dos enunciados.
En «q» la conjunción **y** parece expresar la **unión** de dos conjuntos: los filólogos y los matemáticos.
En «r» la conjunción **y** parece expresar la **intersección** de dos conjuntos: los que son animosos y los que son dispuestos.
Aparentemente, la conjunción cambiaría de significado según el enunciado. Además, sería un signo operatorio tanto en los enunciados (lógica) como en los conjuntos (álgebra de conjuntos).

Vamos a demostrar que la conjunción **y** significa siempre el **producto lógico** de dos enunciados. Es, pues, un signo de una operación para los enunciados, pero no para los conjuntos.

9.1.1

Esto es evidente para p.

9.1.2

Transformemos el enunciado q en:

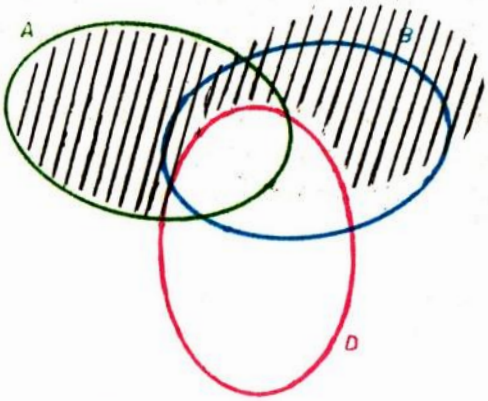
«los filólogos utilizan la lógica
y (producto lógico)
los matemáticos utilizan la lógica»

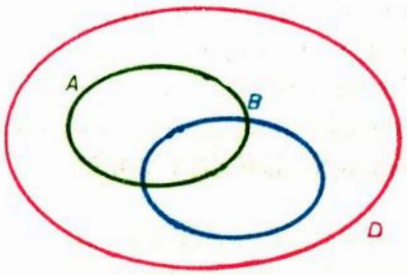
q puede escribirse:

$$(A \subset D) \wedge (B \subset D)$$

donde

A = los filólogos
B = los matemáticos
D = los que utilizan la lógica





Y vemos que

$$[(A \subset D) \wedge (B \subset D)] \Leftrightarrow [(A \cup B) \subset D]$$

Lo que nos muestra por qué interpretamos la conjunción **y** expresando la unión de los conjuntos sujetos.

9.1.3

Transformemos el enunciado r en:

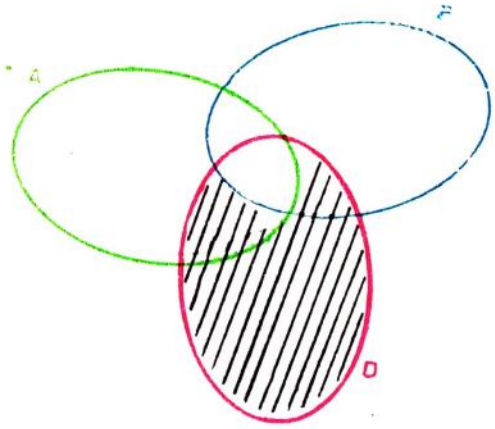
«los alumnos son animosos
y (producto lógico)
los alumnos son dispuestos»

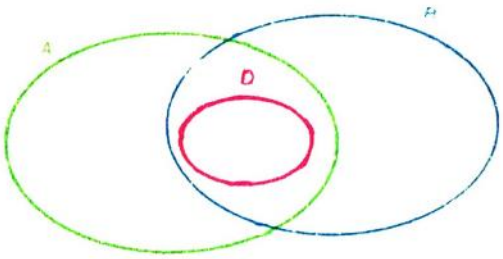
r puede escribirse:

$$(D \subset A) \wedge (D \subset B)$$

donde

D = los alumnos
A = los seres animosos
B = los seres dispuestos





Y vemos que

$$[(D \subset A) \wedge (D \subset B)] \Leftrightarrow [D \subset (A \cap B)]$$

Lo que nos muestra por qué interpretamos la conjunción **y** expresando la intersección de los conjuntos atributos.

9.2

Podríamos igualmente transformar las conjunciones «o, ni... ni... ya... ya...» en operaciones con enunciados, consideradas eventualmente como operaciones con conjuntos.
Podríamos deducir la ambigüedad de la conjunción «o» tal como es utilizada en el lenguaje corriente. Pero esto nos obligaría a hacer un desarrollo lingüístico demasiado largo. Tendríamos que referirnos a la gramática del año 2000.

9.3

«Triunfó porque trabajó.»

Un enunciado tan complejo expresa dos enunciados realizados:

p = triunfó
q = trabajó

así como una condición: $q(x) \Rightarrow p(x)$; es decir:
si **se** trabaja,
entonces **se** triunfa (se = x).
Hay, pues, una diferencia esencial entre las proposiciones condicionales y las proposiciones causales. De igual forma, podemos distinguir claramente las conjunciones «ya que» y «porque».

Condicional:
Si Pedro trabaja, triunfa: $p(x_0) \Rightarrow q(x_0)$
Causal (ya que):
Pedro triunfó ya que trabajó: $p(x_0) \wedge q(x_0) \wedge [q(x) \Rightarrow p(x)]$.
Causal (porque):
Pedro triunfó porque trabajó: $p(x_0) \wedge q(x_0) \wedge [p(x) \Rightarrow q(x)]$.
Concesiva:
Pedro no triunfó aunque trabajó: $\tilde{p}(x_0) \wedge q(x_0) \wedge [p(x) \Rightarrow q(x)]$.

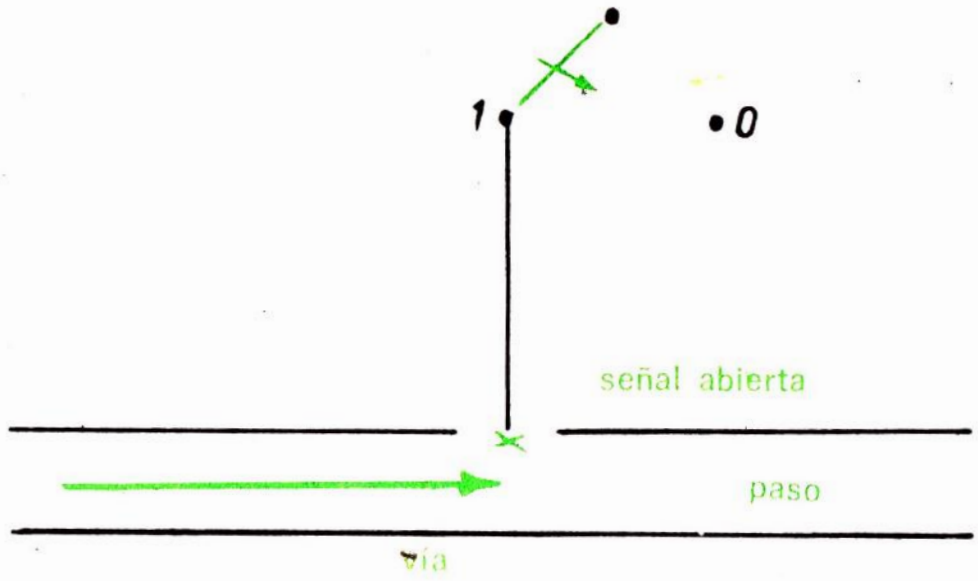
10. La lógica de las máquinas

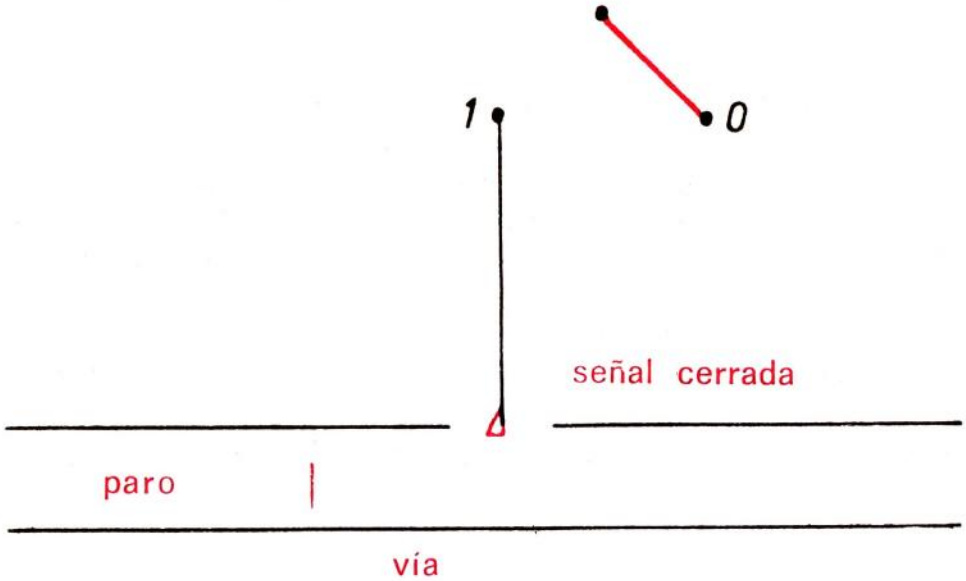
10.1

Desde la antigüedad el hombre ha construido máquinas para ayudarle y suplirle en diversos trabajos. El hombre de hoy, con los ordenadores, ha inventado máquinas capaces de razonar en vez de él.
«Razonar» no debe ser entendido más que como «calcular logicamente la precisión de un razonamiento» y no como «imaginar», «crear», «criticar».
La máquina debe, por tanto, poseer órganos lógicos capaces de mecanizar las operaciones con enunciados. Vamos a describiros algunos, limitándonos a sus principios. Su realización y las diversas técnicas utilizadas se encuentran en las obras especializadas.

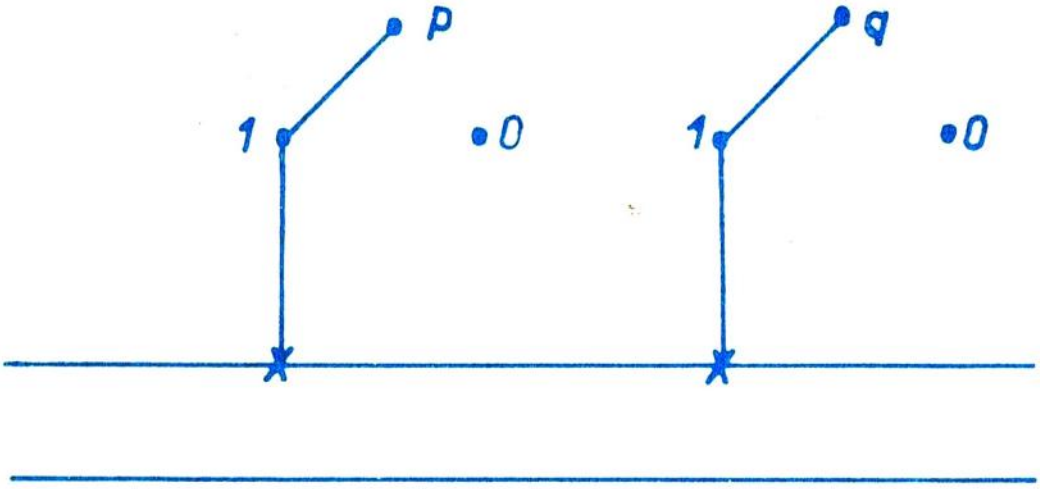
10.2

Imaginemos una vía de circulación. Pueden por ella circular:
automóviles (y entonces se trata de una carretera),
agua (y entonces se trata de una tubería),
electrones (y entonces se trata de un circuito eléctrico),
etc.
En esta vía de circulación podemos colocar un interruptor. Será:
una luz roja (en una carretera),
una llave de paso (en una tubería),
un interruptor (en un circuito eléctrico).
Podemos suponer que este interruptor está mandado por un botón con dos posiciones:
en la posición (1) el interruptor está abierto (la circulación pasa);
en la posición (0) el interruptor está cerrado (la circulación no pasa).

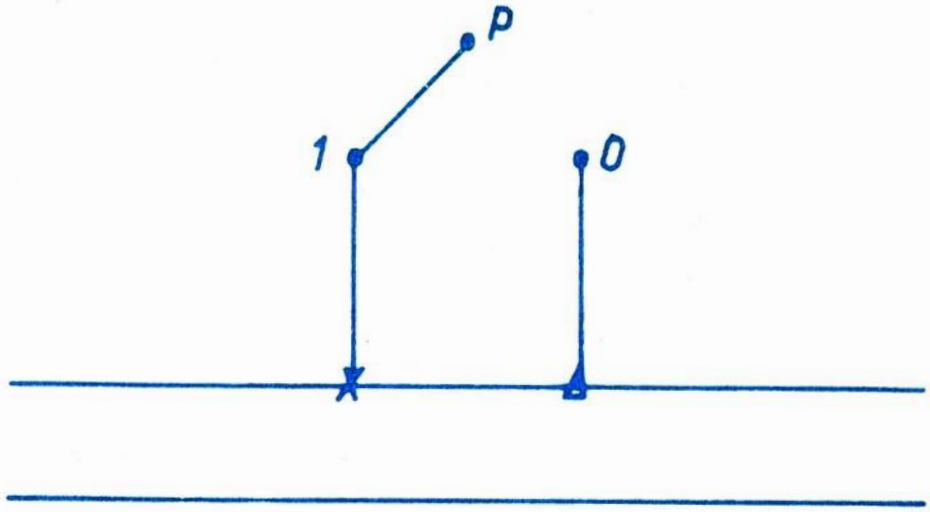




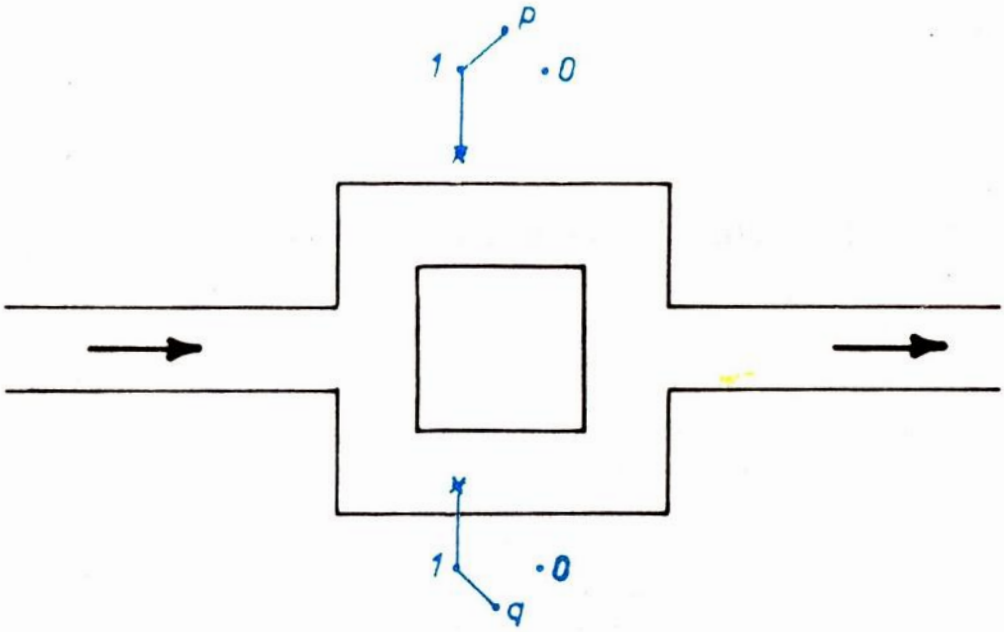
Podemos montar dos señales en serie.



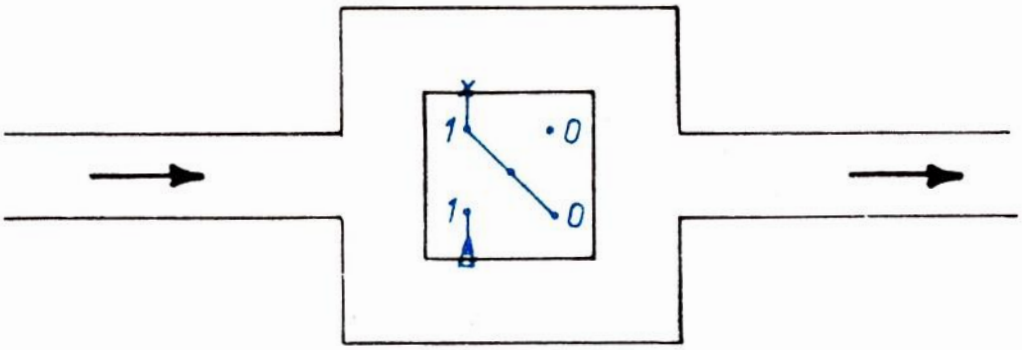
Los botones de mando tienen cada uno dos posiciones {1, 0}.
La circulación se establece en la posición 1 1.
La circulación se detiene en las posiciones 1 0, 0 1, 0 0.
Escribiremos esto: $p \wedge q$.
¿Qué nos dice el siguiente montaje?



Siempre hay una señal cerrada y, por lo tanto, la circulación está siempre detenida.
Expresamos esto por $p \wedge \tilde{p}$ o también $\mathcal{T}$ que corresponde a un cierre permanente de la vía.
Podemos montar dos señales en paralelo.



Los botones de mando no cierran la circulación más que en la posición 0 0.
Expresaremos esto por $p \vee q$.
¿Qué ocurrirá con el siguiente montaje?



Tendrá siempre una señal abierta y la circulación pasará siempre. Expresaremos esto por $p \vee \tilde{q}$ o también por τ que corresponde a una apertura permanente de la vía

Estos montajes simulan analógicamente las operaciones de producto lógico y suma lógica. Si la circulación pasa (por ejemplo, la corriente encendiendo una lámpara), el enunciado correspondiente es verdadero. Si la circulación pasa cualesquiera que sean las posiciones del botón de mando, el enunciado correspondiente es una tautología.

Cualquier álgebra de conjuntos y de enunciados puede ser calculada utilizando dichos circuitos.

El estudio de las estructuras de estos circuitos realza por sí misma el álgebra booleana que llega a ser, por el lenguaje de las máquinas, más importante que el álgebra tradicional.

11. De la importancia de ser mentiroso

11.1

Epiménides dijo:

«Los cretenses son mentirosos.»

Pero, ¡Epiménides es cretense!

Luego, Epiménides es mentiroso (según Epiménides);

Pero si Epiménides es mentiroso, lo que dice es falso;

Luego los cretenses no son mentirosos;

Pero entonces, lo que Epiménides dijo es verdad;

Luego los cretenses son mentirosos;

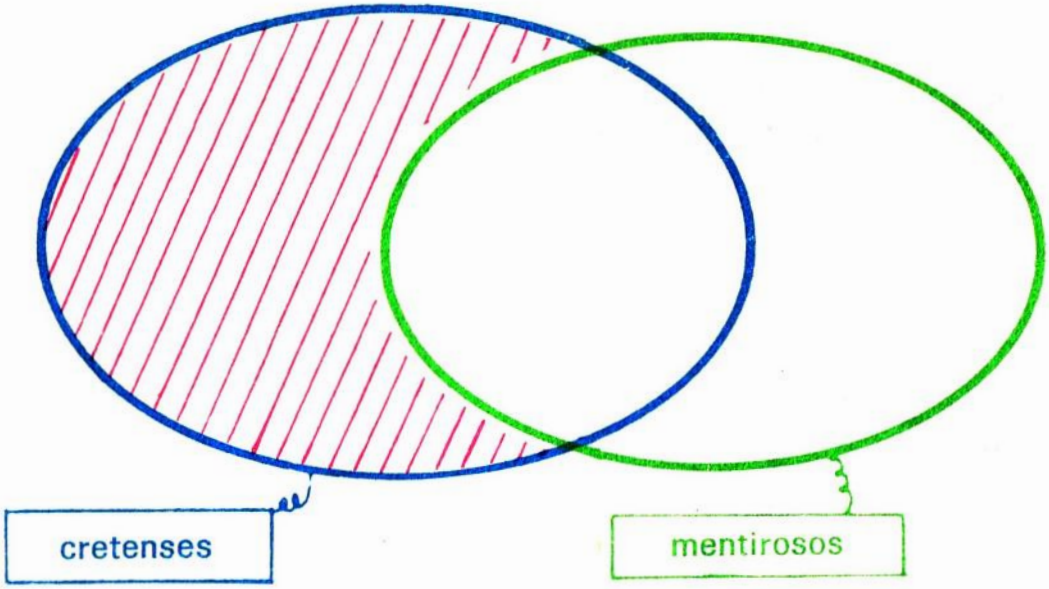
Pero entonces, etc.

Podemos cómodamente responder a esta paradoja, gracias a los sofistas griegos:

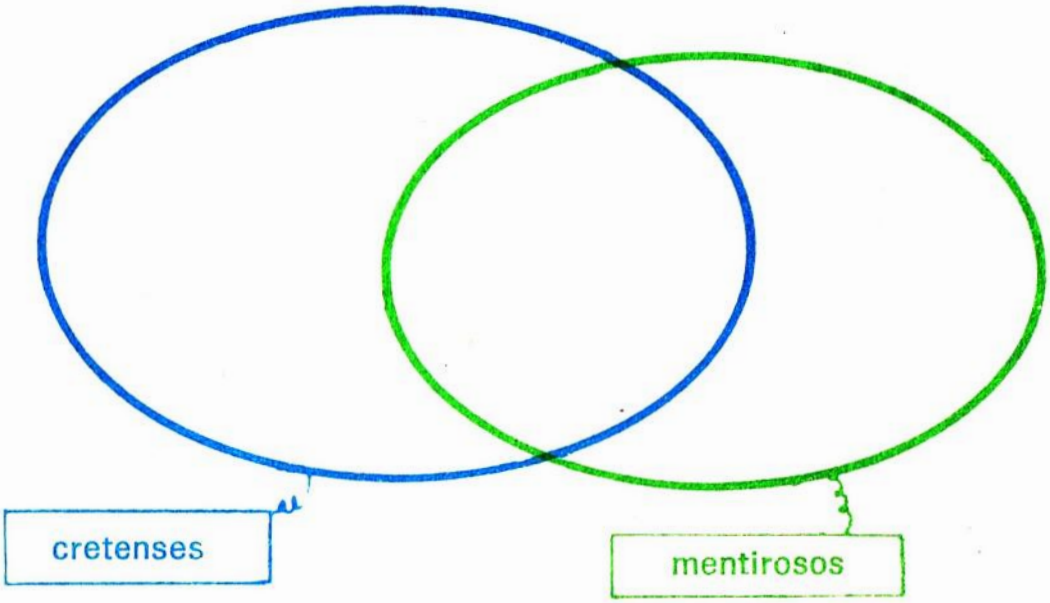
(Todos los cretenses son mentirosos) es falso.

$\Leftrightarrow$

Algunos cretenses no son mentirosos.



Todos los cretenses son mentirosos.



Algunos cretenses no son mentirosos.

Analicemos la situación considerando que:

Algunos cretenses no son mentirosos.
Epiménides es mentiroso

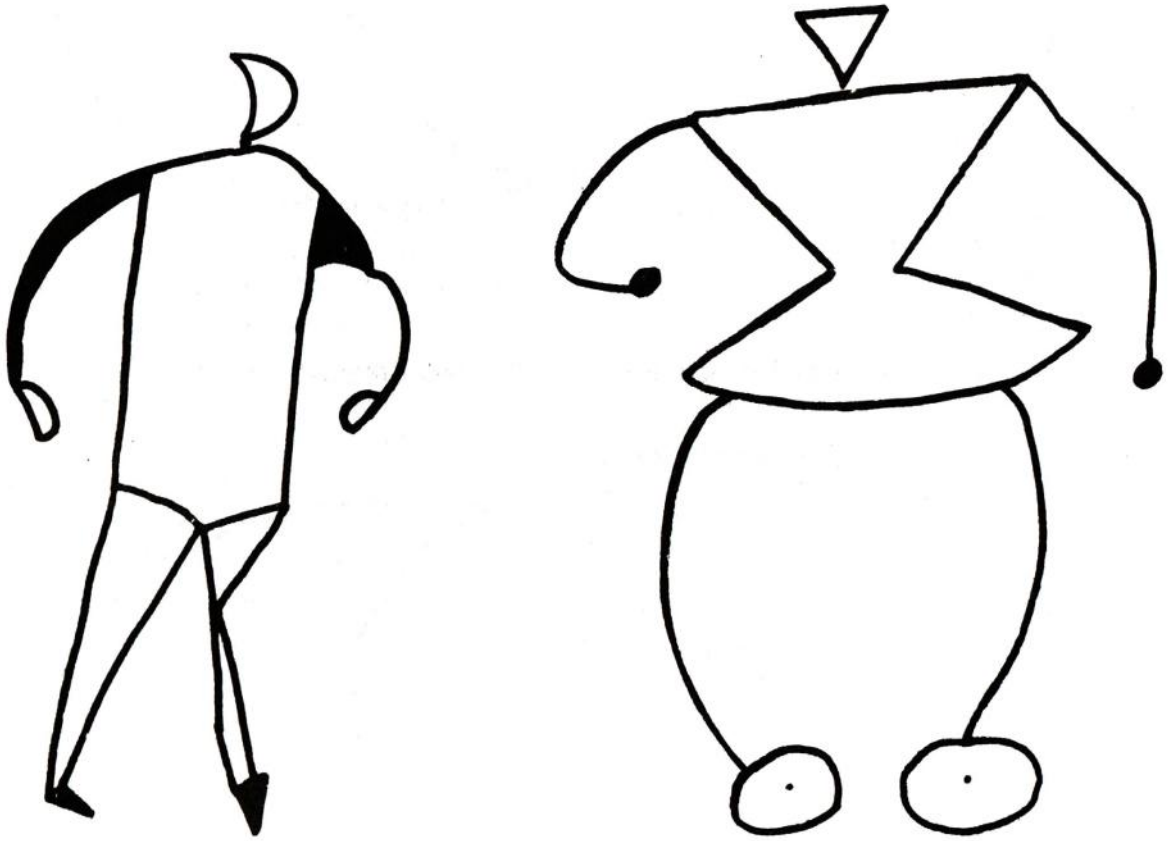
Mintió afirmando que todos los cretenses eran mentirosos.

11.2

Una «pega» para terminar.
En esta isla lejana

los katablepos mienten siempre,
los truños dicen siempre la verdad.

Encuentro dos seres muy diferentes: uno es un katablepo y el otro es un truño.
¿Puedo yo saber, haciendo solamente una pregunta a uno de ellos, quién es realmente el truño y quién es el katablepo?
Aquí, os dejamos un poco de tiempo para reflexionar...



¿Lo habéis encontrado?
Bien, la pregunta para uno de ellos es:

«¿Qué me contestará tu compañero si le pregunto quién eres tú?»

En efecto, si mi interlocutor es katablepo, su compañero es truño; su compañero respondería katablepo y mi interlocutor diría truño.
Si mi interlocutor es truño, su compañero es katablepo; su compañero respondería katablepo; luego mi interlocultor diría katablepo.
¡Mi interlocutor es siempre el contrario de lo que me responde!
Y conociendo uno, conozco rápidamente al otro.

5

LAS RELACIONES

¡El niño, la madre, una pareja!
La madre alimenta al niño; el niño es alimentado por la madre; estrechamente unidos, desde la concepción, en un sentido irreversible.
La madre da a luz al niño; el niño recibe la vida de la madre. Y, cortado el cordón, la pareja es siempre la pareja.

1. El asesinato considerado como una relación binaria

1.1

¡En la vida, es bueno relacionarse!
Pero, ¿es verdaderamente una relación vuestra?
¡Se enfrían las relaciones entre la Papuasia y la Patagonia!
El derecho romano definía así la relación de paternidad: IS PATER EST QUEM NUPTIAE DEMONSTRANT (1).

La palabra «relación», como todas las palabras que se usan habitualmente, tiene múltiples acepciones. El matemático la utiliza en un sentido muy preciso. La acepción matemática es conjuntista; las relaciones son de hecho conjuntos formados por elementos con propiedades especiales.

(1) El padre es el que indica la boda. Literalmente, «es el padre quien demuestra la boda».

No discutiremos si el «Juramento de los Horacios» es el más bello de los cuadros del Museo del Louvre. Pero, sin lugar a dudas, es el más útil para introducir el concepto de relación binaria.
Nota: los brazos, las espadas y la lanza son las concreciones de las flechas del grafo. (V. continuación de la historia.)

1.2

Partiremos de un bonito melodrama histórico, contado por Tito Livio y exaltado por Corneille: la historia de los Horacios y los Curiacios. Ocurrió poco después de la fundación de Roma.

Papá Horacio (un bravo romano) tenía tres hijos y una hija llamada Camila. Por aquellos tiempos estaban en guerra romanos y albanos. Para poner fin a ella, decidieron el triunfo en un combate, que en un campo cerrado librarían tres guerreros romanos contra tres albanos. Fue por ello por lo que tuvieron que luchar los tres Horacios contra los tres Curiacios.

Pero, siguiendo el relato de Corneille, uno de los Curiacios estaba enamorado de Camila.

¡Combate! Los tres Horacios hieren cada uno a su adversario, pero dos de los Horacios mueren por la patria romana. Quedan, pues, frente a frente un Horacio y tres Curiacios.

¿Qué creéis que hizo contra los tres? ¿Murió?

¡No! Hizo mejor: huyó.

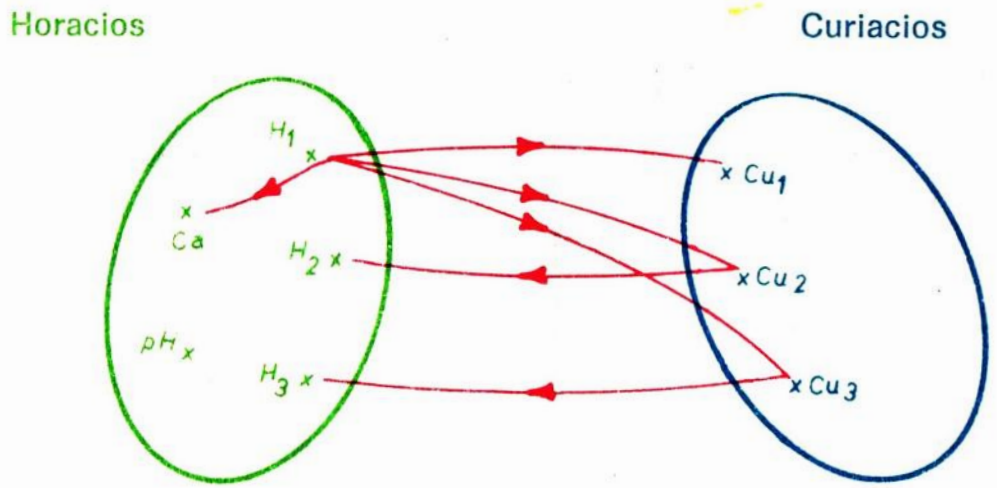
Horacio, pues, emprendió la huida. Los Curiacios le persiguieron; pero sus heridas les distanciaron de aquél. Entonces, Horacio, indemne, se volvió y, separadamente, mandó el alma de cada uno de los Curiacios al panteón de su patria, Alba.

¡Aclamaciones! ¡Triunfo! Pero su hermana Camila, en lugar de felicitar a su hermano mayor, le llenó de injurias.

Como todos los romanos, Horacio no tenía sentido del humor y envió el alma de su hermana Camila a reunirse con la de su querido Curiacio. (Sigue y acaba en Tito Livio, Corneille o en el Diccionario Larousse.)

1.3

Los pintores y los poetas han ilustrado esta historia. Pero yo, que soy matemático, os propongo el cuadro épico que sigue: pertenece a la escuela abstracto-figurativa de pintura. Se llama **grafo.**



Este grafo se interpreta fácilmente, sobre todo si se sabe que

pH = papá Horacio

Ca = Camila

y que las flechas significan «matar».

Considerados como «enunciados», ¿qué encontramos en este cuadro? Encontramos que:

Curiacio 2 mata a Horacio 2
Curiacio 3 mata a Horacio 3
Horacio 1 mata a Curiacio 1
Horacio 1 mata a Curiacio 2
Horacio 1 mata a Curiacio 3
Horacio 1 mata a su hermana Camila.

Resumiendo: «matar» se realiza en el conjunto de parejas:
{[C2, H2], [C3, H3], [H1, C1], [H1, C2], [H1, C3], [H1, Ca]}

2. La pareja y el par

2.1

[H1, C1] es una **pareja** y no un par. Queremos decir con esto que los elementos del par {H1, C1} están **ordenados.** En efecto, no es lo mismo decir

H1 mata a C1 que decir C1 mata a H1

Podríamos indicar esta ordenación empleando colores:

$$\{H_1\ C_1\} = \{C_1\ H_1\}$$

Es más sencillo convenir un orden en la escritura:

[H1, C1] ≠ [C1, H1]

Una pareja es un par de elementos dados en un cierto orden.

2.2

¿En qué se diferencia una pareja de un par?

En un par	**En una pareja**
{a, b} = {b, a}	(a, b) ≠ (b, a)
{a, a} = {a}	(a, a) es una pareja
{p, q} = {r, s}	(p, q) = (r, s)
significa	significa
o bien p = r y q = s o bien p = s y q = r	p = r y q = s

El reclutador para la guerra del 14-18 señala con el índice. ¡Te veo, a pesar tuyo, incorporado a una pareja!

2.3

Si se permuta el orden de una pareja se obtiene la pareja **recíproca** (1).

Se escribe $(a, b) = (b, a)^{-1}$

Con un código de colores se escribirá:

$$(a\ b) = (a\ b)^{-1}$$

Se tiene: $[(a, b)^{-1}]^{-1} = (a, b)$

2.4

Una pareja es igual a su recíproca si sus elementos son iguales:

$$(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$$

¿Hemos encontrado alguna pareja parecida en nuestra historia? ¡No! Pero podríamos fácilmente imaginarnos una, mediante la solución siguiente:

«Abrumado por el remordimiento, el joven Horacio se mató sobre el cadáver de su hermana» (2).

Esto se traducirá por:

matar es realizado por {H1, H1}.

Una pareja, cuyos elementos son iguales, es un «ídem» (o pareja idéntica).

2.5

El grafo de una pareja es la flecha que une los puntos que representan a los elementos.

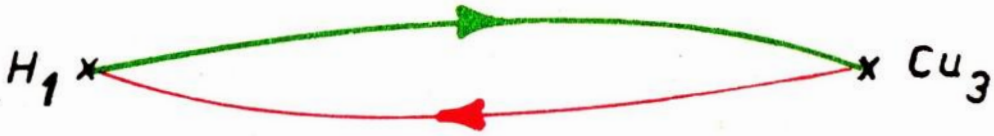
El **origen** y el **extremo** de la flecha indican el orden de los dos elementos.

Invirtiendo el sentido de la flecha, se representa la pareja recíproca.

---

(1) Algunos la llaman «inversa» y otros «simétrica», pero esto produce dificultades en el enunciado de las propiedades generales de las relaciones.

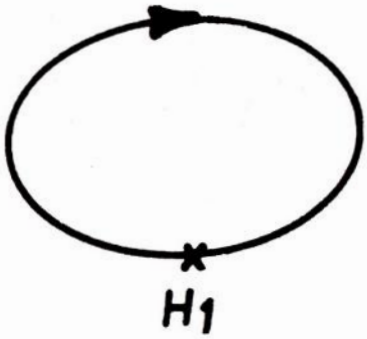
(2) La solución no es bastante «romana». En la historia, el pueblo absuelve a Horacio, que desde entonces podrá seguir matando a muchos más niños albanos.



(H1, Cu3)
(Cu3, H1)

$(H1, Cu3)^{-1} = (Cu3, H1)$

¿Cómo representar: «Horacio se mata»?
El grafo es:



Es inútil indicar el sentido de la flecha, pues es el mismo Horacio el que mata y el que es matado. La flecha es, pues, un **lazo.**
Los ídems están representados por lazos.

3. El producto cartesiano de dos conjuntos

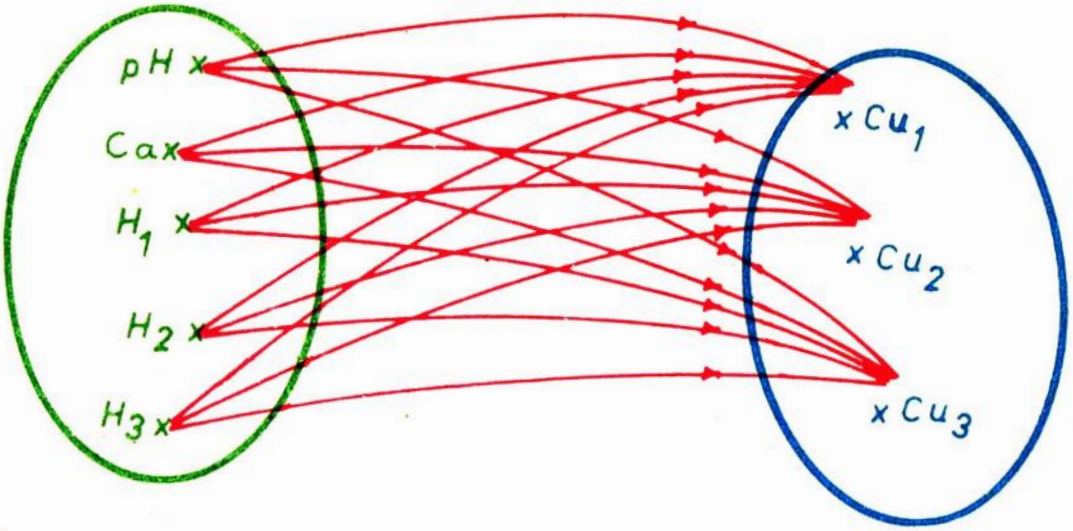
3.1

Supongamos que, en vez de utilizar el verbo «matar», utilizamos el verbo más pacífico «conocer»:

«un tal Horacio conoce a un tal Curiacio».

Hay una razón para creer que este enunciado es verdadero para cualquier Horacio y para cualquier Curiacio.
Tenemos, pues, que:

«conocer» es realizado por {(H1, Cu1), (H1, Cu2), (H1, Cu3), (H2, Cu1), (H2, Cu2), (H2, Cu3), (H3, Cu1), (H3, Cu2), (H3, Cu3), (pH, Cu1), (pH, Cu2), (pH, Cu3), (Ca, Cu1), (Ca, Cu2), (Ca, Cu3)}.



3.2

Hemos formado el conjunto que contiene todas las parejas, cuyo origen pertenece a H y los extremos pertenecen a C. Un conjunto constituido de esta manera recibe el nombre de **producto cartesiano** de H y de C y se representa por $H \times C$:

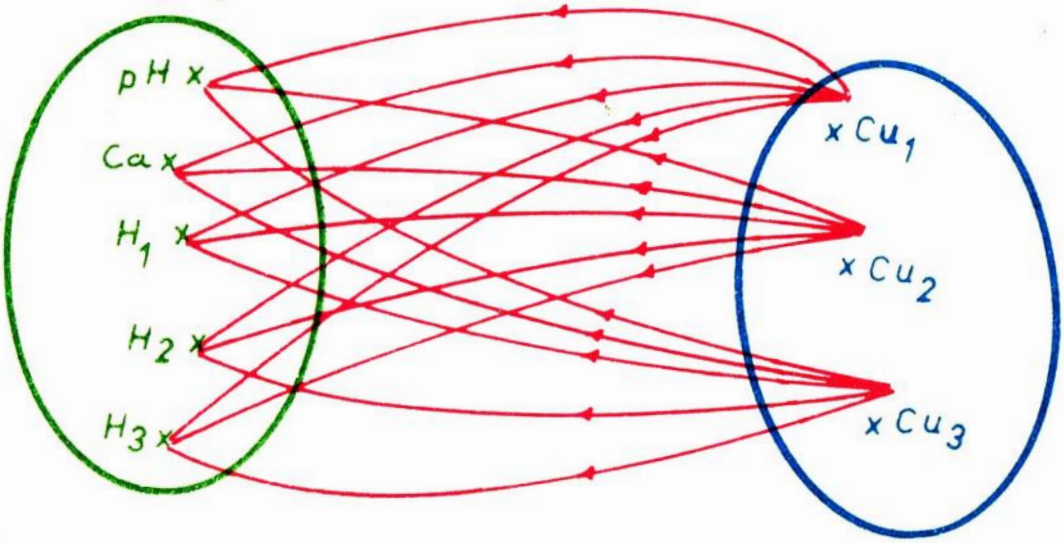
$$H \times C = \{(x, y) \mid (x \in H) \wedge (y \in C)\}.$$

3.3

Igualmente podríamos haber efectuado el producto $C \times H$:

$C \times H = \{(x, y) \mid (x \in C) \wedge (y \in H)\}$

$C \times H = \{$(Cu1, H1), (Cu1, H2), (Cu1, H3), (Cu1, Ca), (Cu1, pH), (Cu2, H1), (Cu2, H2), (Cu2, H3), (Cu2, Ca), (Cu2, pH), (Cu3, H1), (Cu3, H2), (Cu3, H3), (Cu3, Ca), (Cu3, pH)$\}$ cuyo grafo es:



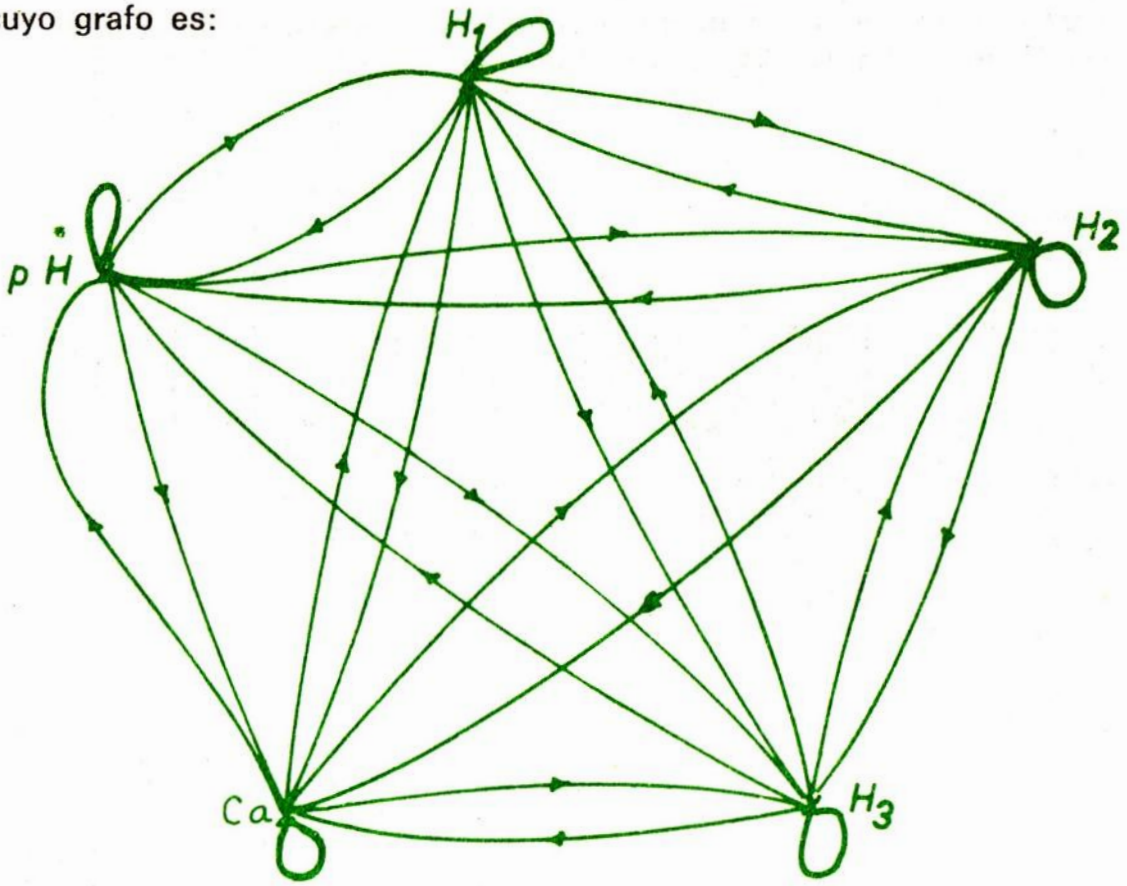
3.4

Habríamos podido efectuar el cuadrado cartesiano $H \times H$:

$H^2 = H \times H = \{$(H1, H1), (H1, H2), (H1, H3), (H1, Ca), (H1, pH), (H2, H1), (H2, H2), (H2, H3), (H2, Ca), (H2, pH), (H3, H1), (H3, H2), (H3, H3), (H3, Ca), (H3, pH), (Ca, H1), (Ca, H2),

(Ca, H3), (Ca, Ca), (Ca, pH), (pH, H1), (pH, H2), (pH, H3), (pH, Ca), (pH, pH)}

cuyo grafo es:

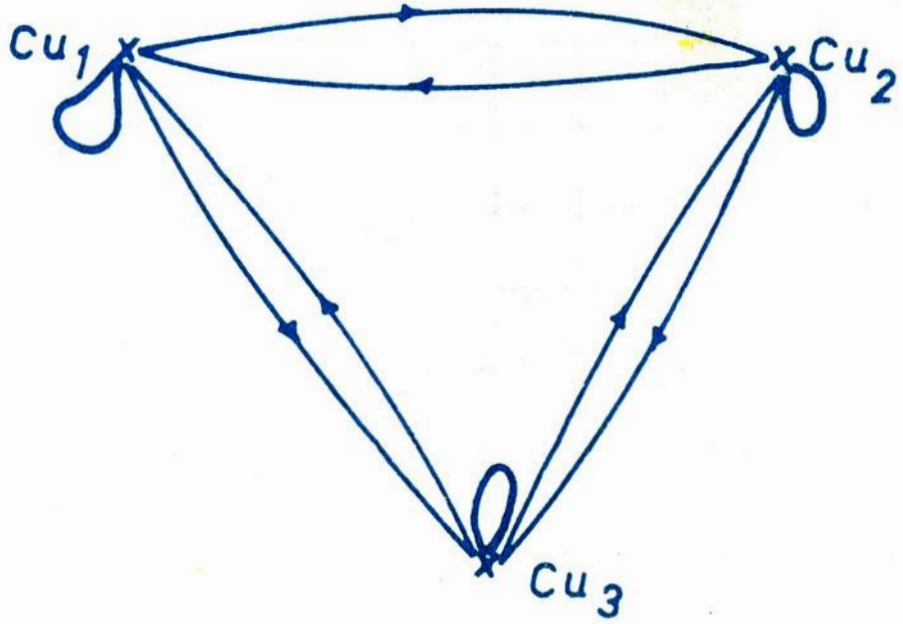


3.5

Habríamos podido efectuar el cuadrado cartesiano C × C:

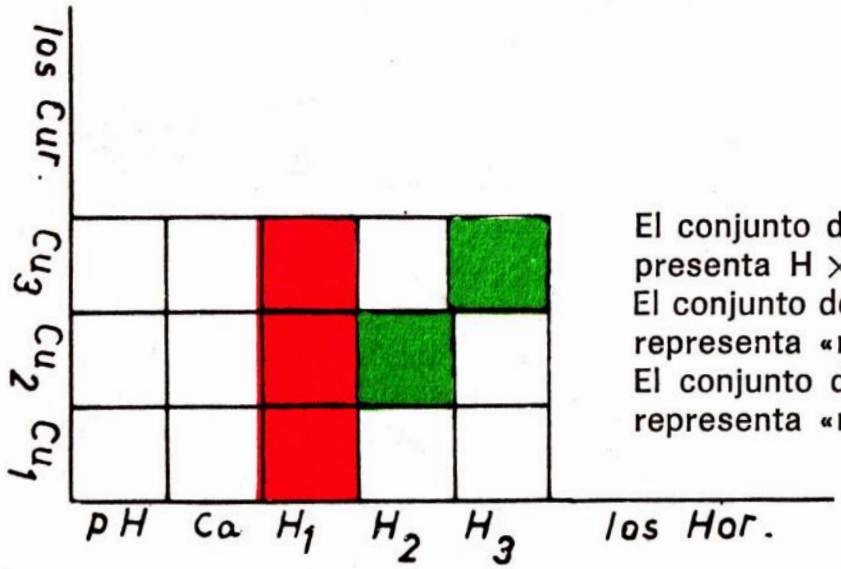
C×C = {(Cu1, Cu1), (Cu1, Cu2), (Cu1, Cu3), (Cu2, Cu1), (Cu2, Cu2), (Cu2, Cu3), (Cu3, Cu1), (Cu3, Cu2), (Cu3, Cu3)}

cuyo grafo es:



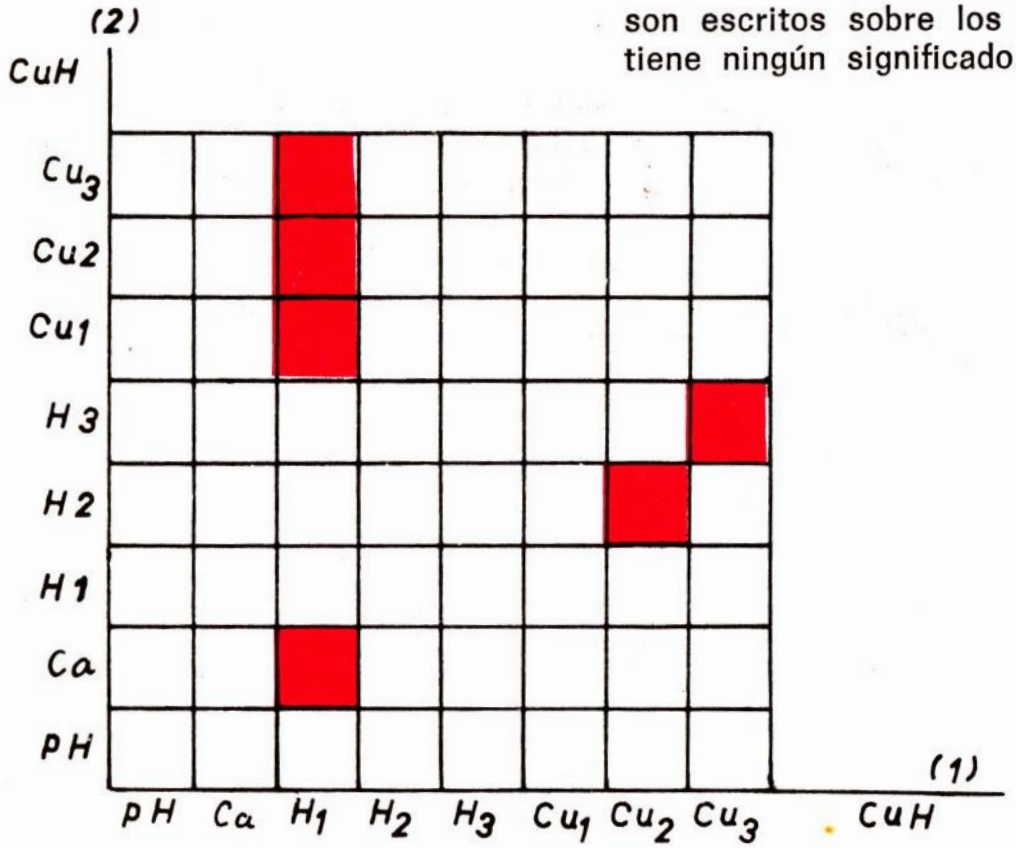
3.6

Utilizamos la representación con flechas, lo que nos da un «grafo». Podemos utilizar una representación por «casillas», que recuerda los ejes cartesianos de las representaciones gráficas tradicionales:

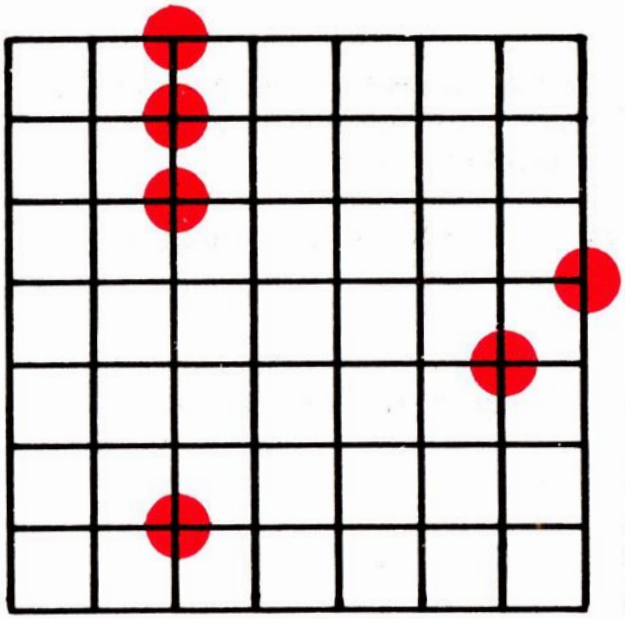


El conjunto de las 15 casillas representa H × C (o C × H).
El conjunto de las casillas verdes representa «matar» en C × H.
El conjunto de las casillas rojas representa «matar» en H × C.

El conjunto de las 64 casillas representa (C ∪ H) × (C ∪ H).
Las casillas rojas representan «matar» en (C ∪ H) × (C ∪ H).
El orden en que los elementos son escritos sobre los ejes no tiene ningún significado.



Nada nos impedirá representar a las parejas por «puntos» en vez de «casillas»:



Se trata en realidad de una representación convencional.
Horacio no es un punto, sino un segmento y la pareja (Horacio y Camila) ya no es un punto, sino una casilla.

3.8

Propiedades del producto cartesiano

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$$

El vacío es absorbente para $\times$

$$A \times B = \varnothing \quad \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{c} A = \varnothing \\ \vee \\ B = \varnothing \end{array} \right.$$

$$A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} A = B \\ \vee \\ A = \varnothing \\ \vee \\ B = \varnothing \end{array} \right.$$

En general, el producto cartesiano no es conmutativo.
Se demuestra también que:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$\times$ es distributiva respecto a $\cup$ y a $\cap$.
De donde:

$$(A \cup B)^2 = A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2$$
$$(A \cap B)^2 = A^2 \cap (A \times B) \cap (B \times A) \cap B^2$$
$$(A \times B)^{-1} = (B \times A)$$

4. Definición de una relación binaria

4.1

Si Horacio mata a su hermana Camila, generalmente decimos que existe una cierta relación entre Horacio y Camila. Será necesario precisar ahora lo que se entiende por **relación.**

Para el matemático:

> **Una relación binaria definida en $A \times B$ es un subconjunto de $A \times B$.**

Por ejemplo:

$$\text{matar}_{H \times C} = \{ (H1, Cu1), (H1, Cu2), (H1, Cu3) \}$$

$$\text{matar}_{C \times H} = \{ (Cu2, H2), (Cu3, H3) \}$$

$$\text{matar}_{H \times H} = \{ (H1, Ca) \}$$

$$\text{matar}_{C \times C} = \varnothing$$

Decir que «Horacio mata a su hermana Camila» es decir que:

$(H1, Ca) \in \text{matar } H \times H$

Decir que «el segundo Horacio mató al segundo Curiacio» es decir que:

$(Cu2, H2) \in \text{matar } H \times C$

Decir que «el primer Horacio mató al tercer Curiacio» es decir que:

$(H1, Cu3) \in \text{matar } C \times H$

etc.

Para el matemático, **una relación binaria es un conjunto de parejas.** Los enunciados del lenguaje, que expresan que dos objetos «están en cierta relación», señalan la pertenencia de la pareja de los dos objetos a la relación (concebida como un conjunto de parejas).

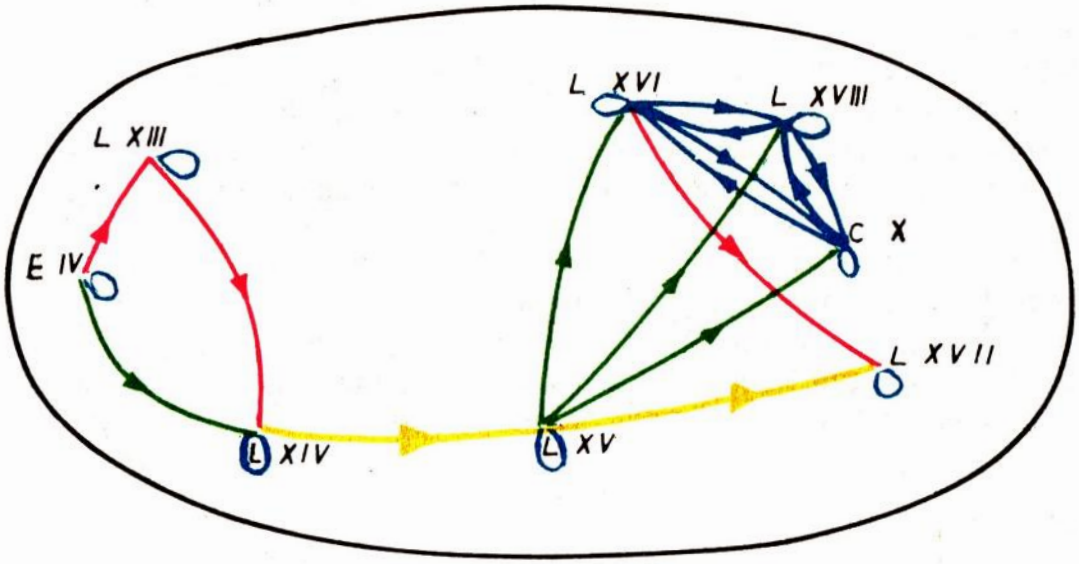
4.2

Ejemplo:

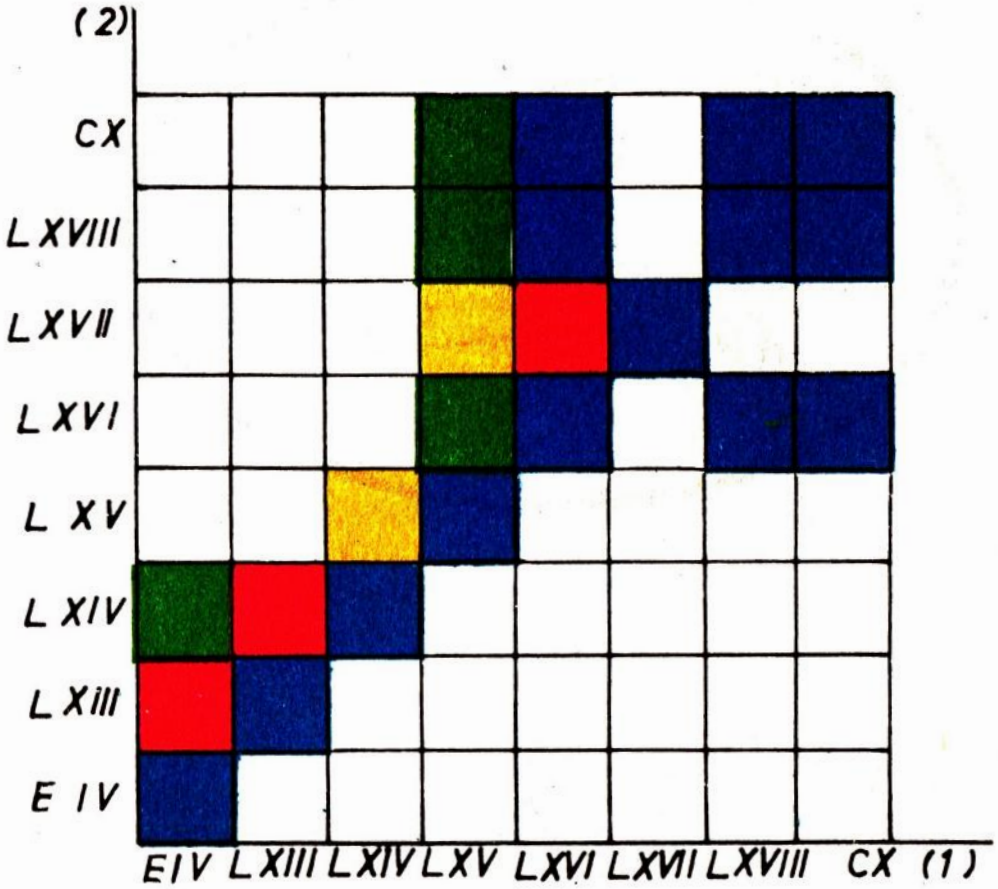
Conjunto E = los reyes de Francia (desde Enrique IV hasta Carlos X).

Relaciones en $E \times E$:

R	ser padre de
S	ser abuelo de
T	ser bisabuelo de
U	ser hermano de



En representación cartesiana:



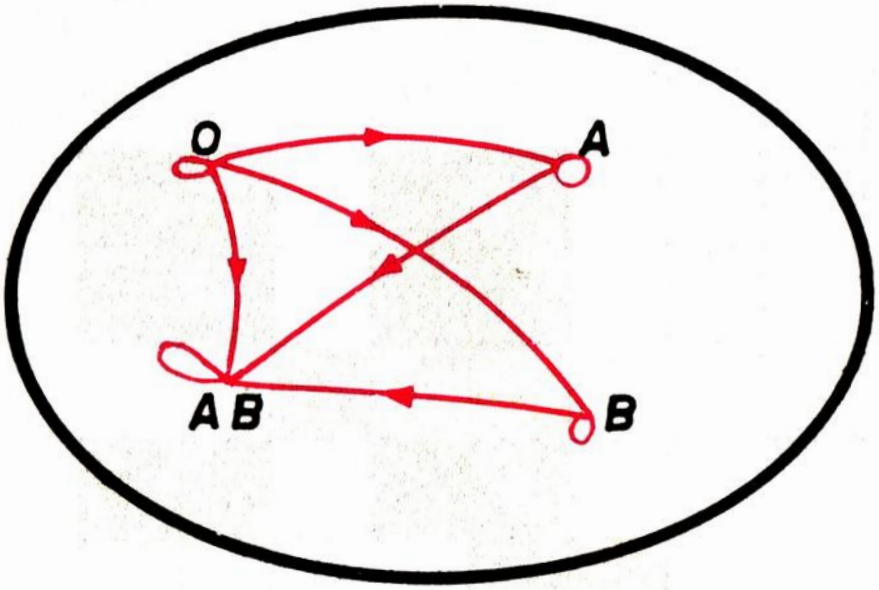
En estas representaciones hemos admitido que cada uno de los reyes era su propio hermano.
Quizá no estéis de acuerdo con esta interpretación. Todo depende de la significación que demos a la relación «su hermano».
Si dos seres son hermanos (en sentido amplio) cuando tienen el mismo padre y la misma madre, entonces todo hombre es su propio hermano;
si (en sentido estricto) exigimos que estos dos seres sean distintos, entonces nadie es su propio hermano.
Esta vez somos dueños de nuestra definición. Una relación no existe «en sí», sino que existe según la construcción que hacemos de ella. Todo reside en el sentido que demos a esta construcción.

4.3

Conjunto E = {O, A, B, AB}

(tipos de donantes de sangre)

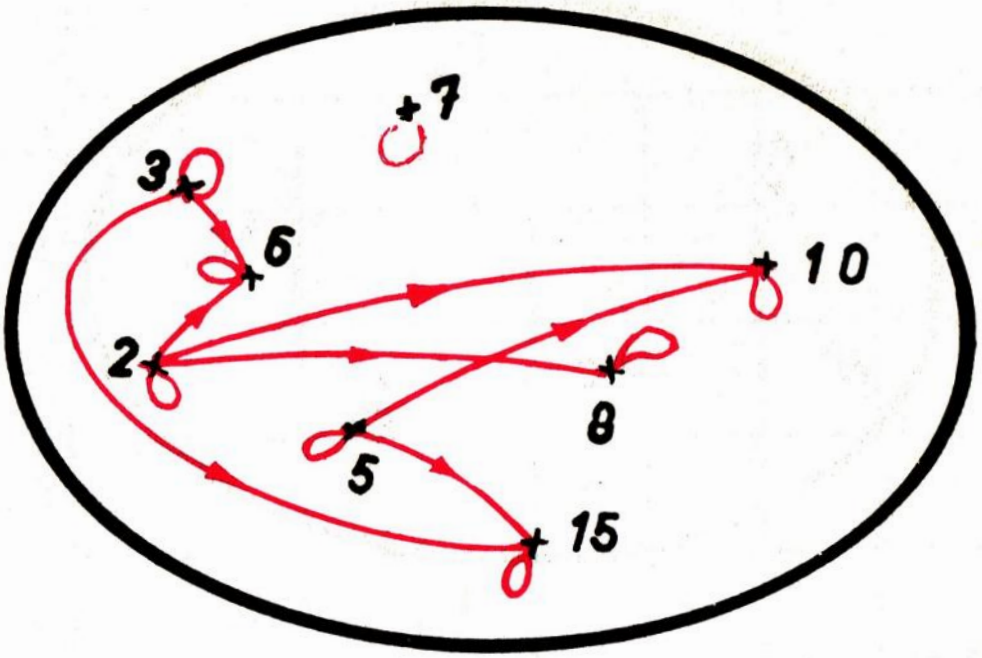
Relación (en E × E): «ser donante para»
R = {(O, O), (O, A), (O, B), (O, AB), (A, A), (A, AB), (B, B), (B, AB), (AB, AB)}



4.4

Ejemplo:

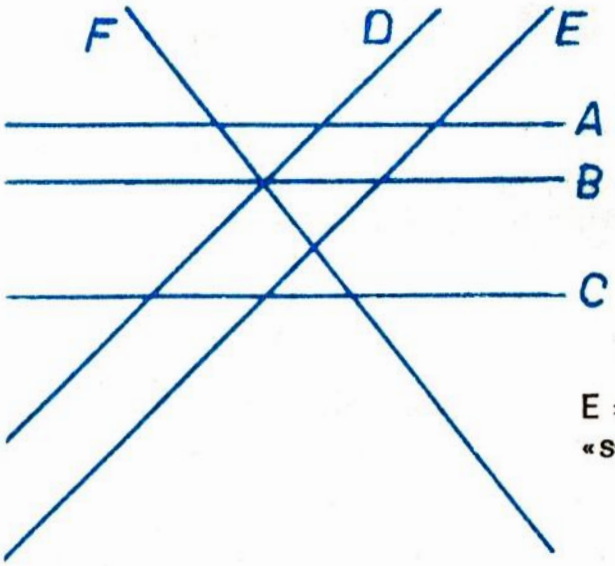
Conjunto E = {2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 15}
Relación en E × E: «ser divisor de»
R = {(2, 2), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (3, 15), (5, 5), (5, 10), (5, 15), (7, 7), (8, 8), (10, 10), (15, 15)}



Ahora, es necesario convenir si un número se puede considerar como divisor de sí mismo (en sentido amplio) o si por el contrario jamás se puede considerar como divisor de sí mismo (en sentido estricto).

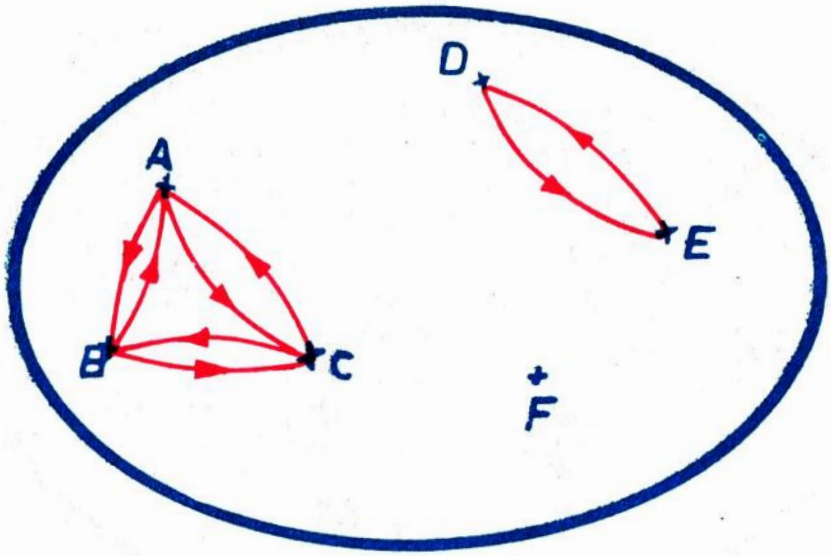
4.5

Ejemplo:



E = {A, B, C, D, E, F}
«ser paralela a» en E × E

Ahora es necesario convenir si una recta es paralela a sí misma o no lo es.
Si entendemos por «paralela» (en el sentido amplio) tener la misma dirección, una recta siempre es paralela a ella misma.
Si entendemos por «paralela» (en el sentido estricto) no tener ningún punto común (pertenecientes todos a un mismo plano), una recta no es nunca paralela a sí misma.

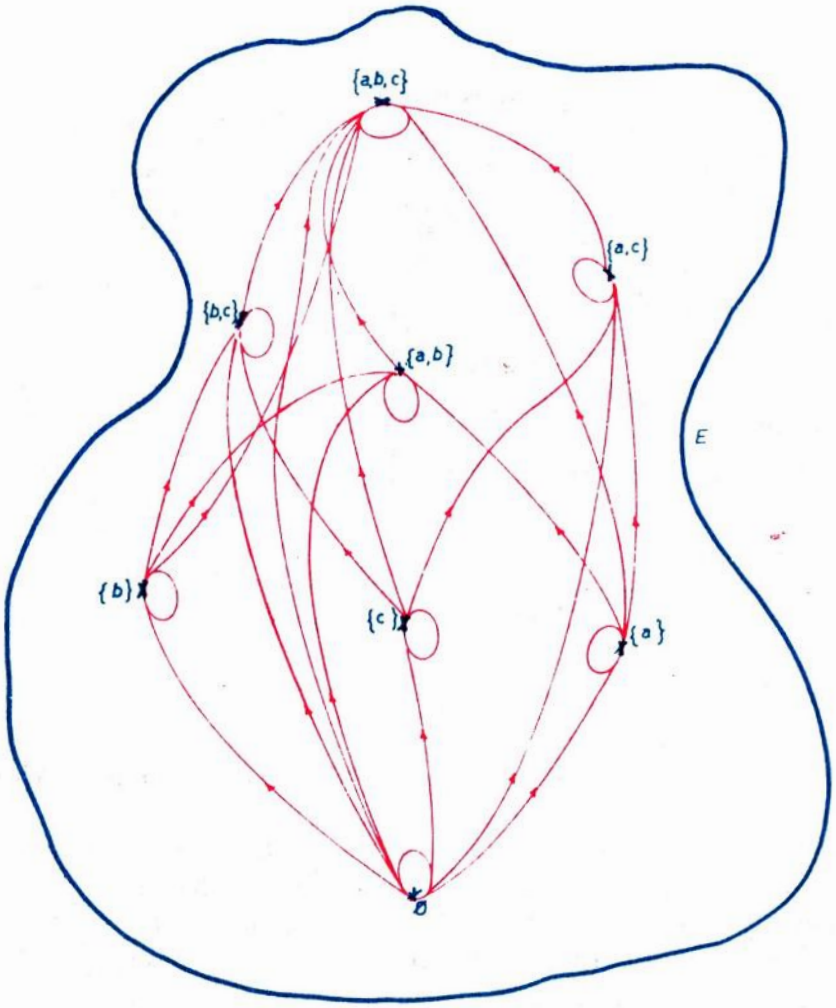


4.6

Ejemplo:

Conjunto $E = \mathcal{P}\{a, b, c\}$ (conjunto de las partes de un conjunto que tiene tres elementos).

Relación: estar contenido (en $E \times E$)



E (2)	∅	{a}	{b}	{a b}	{c}	{a c}	{bc}	{abc}	E (1)
{a b c}	X	X	X	X	X	X	X	X	
{bc}	X		X		X		X		
{a c}	X	X			X	X			
{c}	X				X				
{a b}	X	X	X	X					
{b}	X		X						
{a}	X	X							
∅	X								

Podremos elegir entre:

la inclusión en sentido amplio: $A \subset A$

la inclusión en sentido estricto: $A \underset{str}{\subset} A$

5. Relaciones particulares

5.1

Una relación en $A \times B$ es un subconjunto de $A \times B$.
Entre todos los subconjuntos de $A \times B$ hay el conjunto vacío. Admitimos que existe la **relación vacía.** La representamos por $\varnothing$.
Ejemplos:
En un conjunto de personas: «ser a la vez el padre y el hijo de».
En un conjunto de rectas reales: «ser a la vez paralela y perpendicular a».
En un conjunto de números: «ser a la vez igual y distinto que».

5.2

Entre todos los subconjuntos de $A \times B$, está $A \times B$. Le llamaremos **relación trivial.**

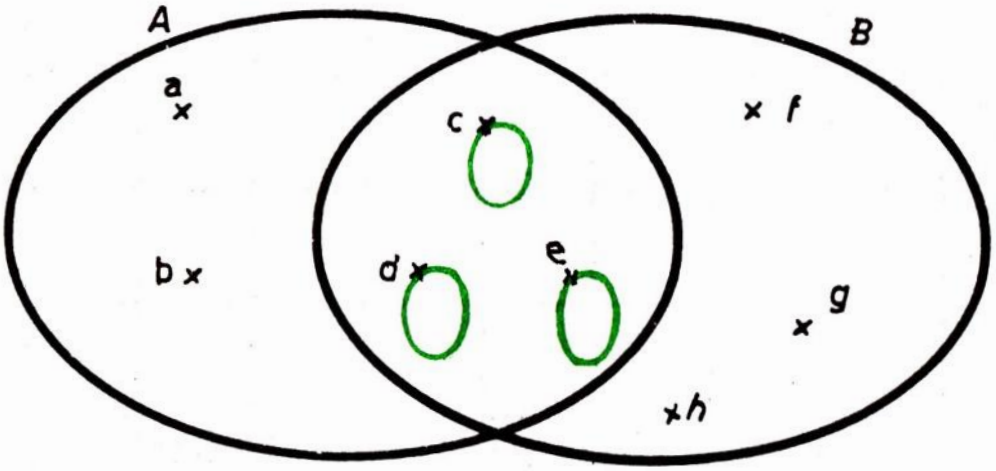
Ejemplos:

En un conjunto de muchachas: «ser del mismo sexo que».

En un conjunto de números: «ser igual o distinto que».

5.3

Entre todos los subconjuntos de $A \times B$ está el conjunto de los ídems (parejas idénticas). Le llamaremos **relación de identidad.**



$$I_{A \times B} = \{ (c, c), (d, d), (e, e) \}$$

Dos conjuntos son disjuntos ssi su relación de identidad es vacía.

5.4

Toda relación definida en $A \times B$ posee su complemento con relación a $A \times B$. Este complemento, al ser subconjunto de $A \times B$, es también una relación. Estas dos relaciones se llaman complementarias.

$$R_{A \times B} \text{ y } (A \times B) \setminus R_{A \times B}$$

son dos relaciones complementarias

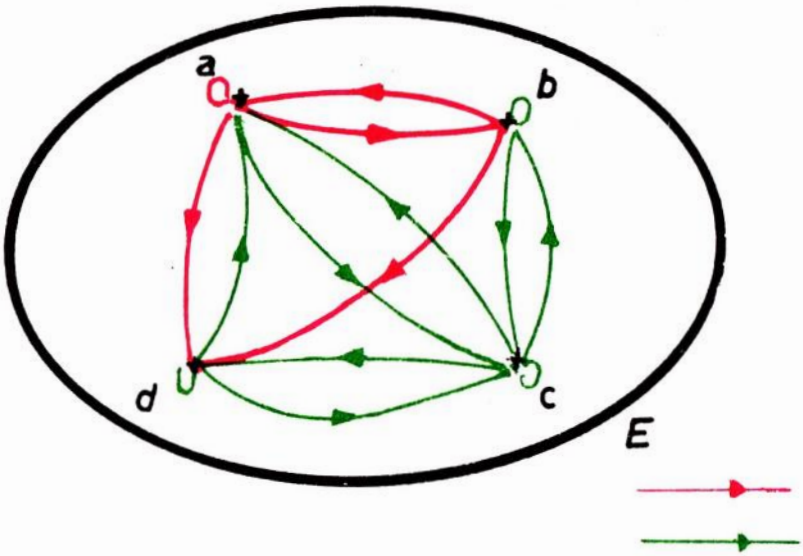
Ejemplos:

«matar» y «no matar» sobre $(H \cup C) \times (H \cup C)$;

ser «igual a» y «distinto de» en un conjunto de números;

ser «paralela a» y «no paralela» en un conjunto de rectas.

En el grafo de una relación se construye la relación complementaria trazando todas las flechas no construidas.
Ejemplo: en $E \times E$



son complementarias.

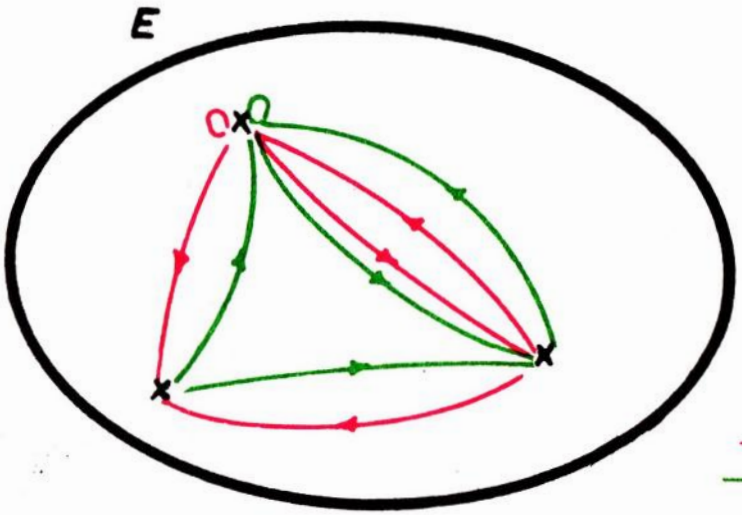
5.5

Dos relaciones son **recíprocas** cuando cada una contiene las parejas recíprocas de la otra (1).

Escribimos: R^{-1} = recíproca de R

$$\forall\ x, y : (x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) \in R^{-1}$$

En el grafo de una relación se construye la relación recíproca, invirtiendo las flechas.
Ejemplo: en $E \times E$



son recíprocas.

(1) También se llama «inversa».

En general, dos relaciones recíprocas estarán definidas, una en $A \times B$ y la otra en $B \times A$; o estarán ambas definidas en $E \times E$.

Ejemplos:

«matar» y «ser muerto por» en $(H \cup C) \times (H \cup C)$;
«ser divisor» y «ser múltiplo de» en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
«ser mayor que» y «ser menor que» en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
«ser padre de» y «tener por padre a».

6. Enunciados relacionales

6.1

Consideremos el enunciado: «Horacio mata a su hermana Camila».
Lo traducimos por: $(H, hC) \in$ matar.
Abreviado: $(H, hC) \in T$ (con $T =$ matar).
Escribiremos igualmente: $h\,T\,c$

$$h\,T\,c \Leftrightarrow (h, c) \in T$$

T es una relación; $h\,T\,c$ es un enunciado relacional.

El enunciado relacional expresa la pertenencia de una o varias parejas a una relación.

No debe confundirse:

la relación (conjunto de parejas)

y

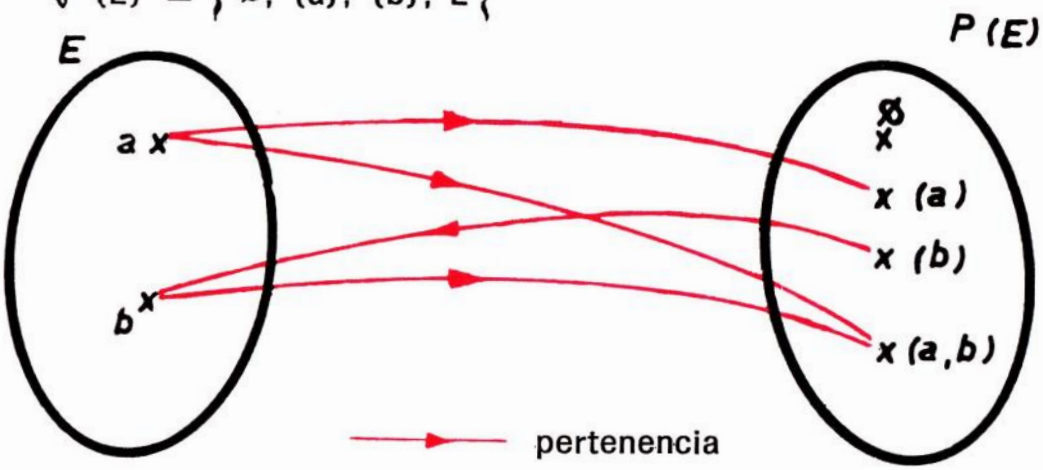
el enunciado(pertenencia de una apareja a una relación).

6.2

El enunciado expresa una pertenencia. Ahora bien, la «pertenencia» es de por sí una relación entre un conjunto de elementos y un conjunto de conjuntos.

Por ejemplo:

$$E = \{a, b\}$$
$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, (a), (b), E\}$$



$\in$ sobre $E \times \mathcal{P}(E)$ es el conjunto de las parejas:
$A = \{(a, \{a\}), (a, E), (b, \{b\}), (b, E)\}$
Tenemos, pues, la equivalencia:

$$x \in E \Leftrightarrow (x, E) \in A$$

Pero $(x, E) \in A$ podría, a su vez, expresarse con una nueva pertenencia:

$$((x, E), A) \in A' \Leftrightarrow (A' \text{ definida en } A \times \mathcal{P}(A))$$

Y, así, cada enunciado de pertenencia se deducirá indefinidamente a un nuevo enunciado más complejo. Este proceso no acaba.
Es más sencillo admitir que consideramos la pertenencia como una relación privilegiada.
De hecho, es la relación de pertenencia la que define las primeras nociones de elemento y de conjunto. Es sobre esta relación que se construye todo el conocimiento de conjuntos.

La pertenencia es un concepto primitivo.

7. Relaciones con n términos

Las relaciones que hemos definido han sido expuestas a partir del concepto de «pareja».
Son relaciones «**binarias**».
Podemos imaginar soluciones definidas a partir de ternas:
El enunciado es: x da a z el libro y,
en el que:

$x \in \{\text{Dupont, Dubois y Durand}\} = A$
$z \in \{\text{Pablo, Pedro, Jaime y Enrique}\} = B$
$y \in \{\text{Los Miserables, El Pequeño Príncipe}\} = C$

Nos permitirá definir una relación con tres términos, como un conjunto de ternas.
Por ejemplo:

(Dupont, Jaime, Los Miserables) $\in$ dar $A \times B \times C$

Podríamos generalizarlo para obtener las relaciones con n términos, construidas como conjuntos de n-uplos.
Las relaciones que encontramos más frecuentemente son binarias. Son las que estudiamos aquí.

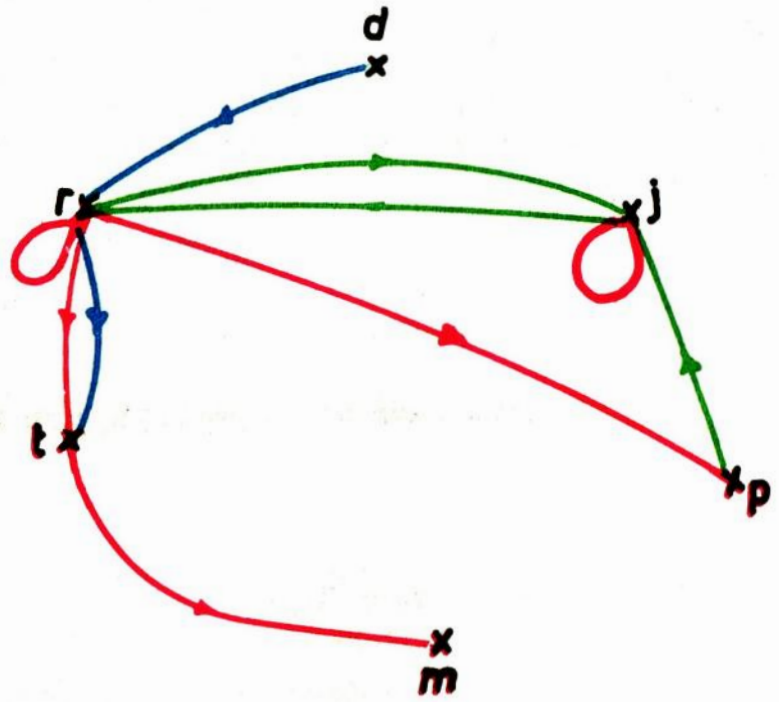
8. Composición de dos relaciones

8.1

Usemos como relato inicial el de Romeo y Julieta, de Shakespeare, tal como nos lo transmitió el propio autor.

Simplificándolo un poco, se puede representar mediante el grafo siguiente:

d: el Duque
r: Romeo
j: Julieta
p: París
t: Teobaldo
m: Mercucio



matar
amar de amor
castigar

Consideremons la peripecia siguiente:
Teobaldo mata al pobre Mercucio, que no le había hecho nada;
Romeo castiga a Teobaldo (matándolo);
El Duque castiga a Romeo (deteniéndole).
En el grafo no vemos relación directa entre:

Romeo y Mercucio.
El Duque y Teobaldo.

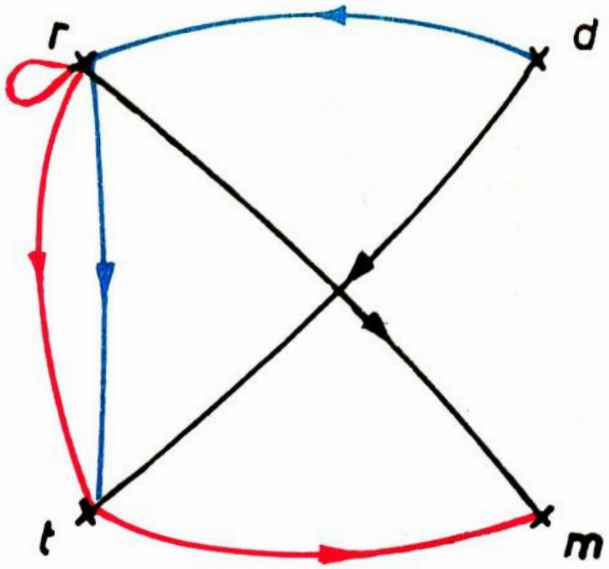
Por lo tanto:

Romeo castiga al que mató a Mercucio.
El Duque castiga al que mató a Teobaldo.

Aceptamos que, para nosotros, «castigar al que mató» es «vengar». Entonces diremos:

Romeo ha vengado a Mercucio.
El Duque ha vengado a Teobaldo.

Si añadimos al grafo la relación «vengar», obtenemos:



vengar

Una flecha azul, seguida de una flecha roja, da una flecha negra.

Si (t, m) ∈ matar y (r, t) ∈ castigar
entonces: (r, m) ∈ vengar.
Y escribiremos: matar o castigar = vengar.

En este cuadro tan útil, Prud'hon nos explica la ley de composición de dos relaciones:

(de Caín a Abel) ⟶ *= matar*
(de las dos damas a Caín) ⇝ *= castigar*
(de las dos damas a Abel) ⇝ *= vengar*

8.2

Sea el conjunto E de los cinco personajes históricos:

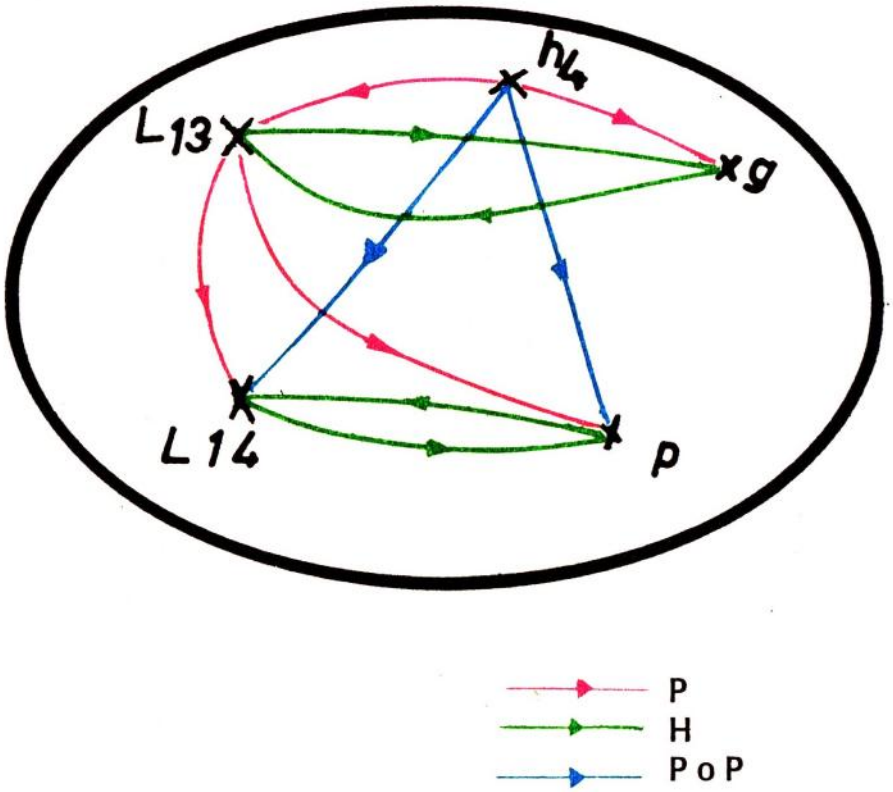
Enrique IV, rey de Francia	H 4
Luis XIII, rey e Francia	L 13
Gastón de Orleáns, su hermano	g
Luis XIV, rey de Francia	L 14
Felipe de Orleáns, su hermano	f

y las relaciones:

P = ser padre de

H = ser hermano de (en sentido estricto).

Obtenemos el grafo:



¿Qué expresa P o H?

P o H = ser hermano del que es padre de

= ser tío de

(g, L 14) ∈ P o H.

¿Qué quiere decir H o P?

H o P = ser padre del que es hermano de

= ser el padre de

(H 4, g) ∈ P (g, L 13) ∈ H (H 4, L 13) ∈ H o P = P

¿Qué quiere decir P o P?

P o P = ser el padre del que es padre de

= ser el abuelo de

(H 4, L 14) ∈ P o P (H 4, p) ∈ P o P

La relación P o H se dice que es el compuesto de las relaciones P y H. P o H se lee «H redondo P»:

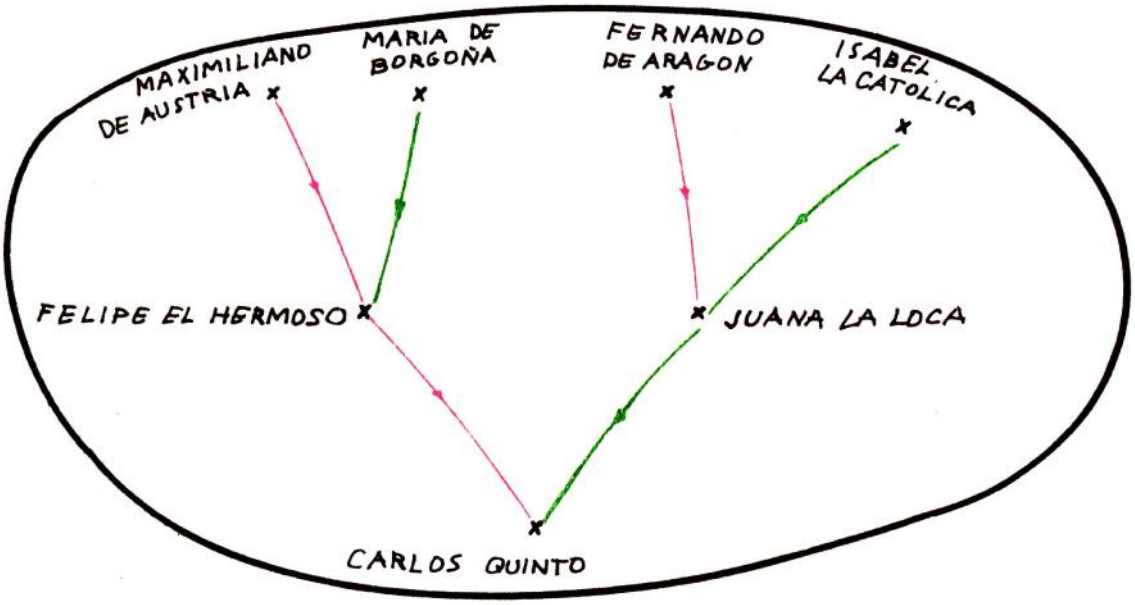
Si $(x, y) \in H$ e $(y, z) \in P$
entonces $(x, z) \in P \circ H$

O también:

Si $x H y$ e $y P z$
entonces $x (P \circ H) z$

8.3

Un último ejemplo de la historia, con la ascendencia de Carlos V:



M = ser la madre de
P = ser el padre de

Entre padres e hijos encontraremos dos relaciones:

M = ser la madre de
P = ser el padre de

Entre abuelos y nietos encontramos cuatro relaciones:

P o P = ser el abuelo paterno de
M o P = ser la abuela paterna de
P o M = ser el abuelo materno de
M o M = ser la abuela materna de

8.4

La composición de dos relaciones es una relación.
La composición es, pues, una **operación** dentro del conjunto de las relaciones.

Se demuestra fácilmente:

$A \circ B \neq B \circ A$	la composición no es conmutativa.
$(C \circ B) \circ A = C \circ (B \circ A)$	la composición es asociativa
$\varnothing \circ A = A \circ \varnothing = \varnothing$	$\varnothing$ es absorbente para o
$I \circ A = A \circ I = A$	I es neutro para o [1]

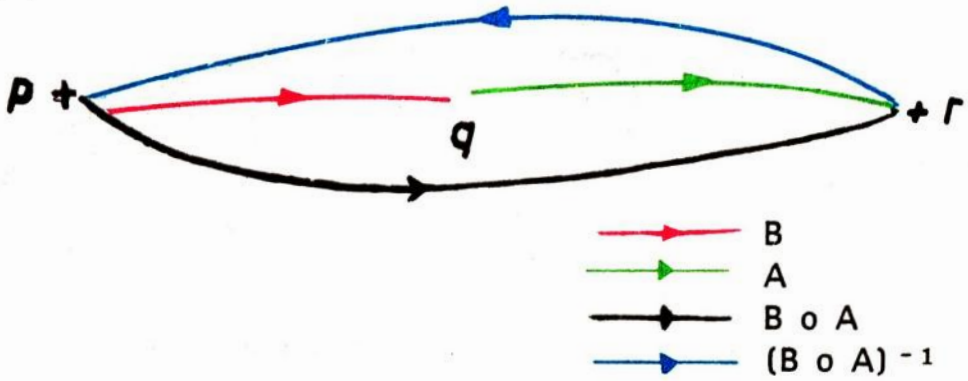
$A \circ A^{-1} = I$

$(B \cup C) \circ A = (B \circ A) \cup (C \circ A)$

$(B \cap C) \circ A = (B \circ A) \cap (C \circ A)$ o es distributiva respecto a $\cup$ y $\cap$

$(B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1}$

Demostremos esta última propiedad de «reciprocidad de una composición»:



$(p, q) \in B$	$(q, r) \in A$	$(p, r) \in B \circ A$
		$(r, p) \in (B \circ A)^{-1}$
$(r, q) \in A^{-1}$	$(q, p) \in B^{-1}$	$(r, p) \in A^{-1} \circ B^{-1}$

9. Propiedades de las relaciones

Vamos a clasificar todas las relaciones particulares, según sus propiedades. Estas propiedades nos llevarán a un cierto nivel de abstracción.

Para simplificar lo expuesto, que hemos introducido por necesidad, nos limitaremos a las relaciones binarias, definidas en $E \times E$.

Las propiedades más importantes son:

— reflexiva
— simétrica
— transitiva

(1) I es la relación de identidad.

9.1

Reflexividad.

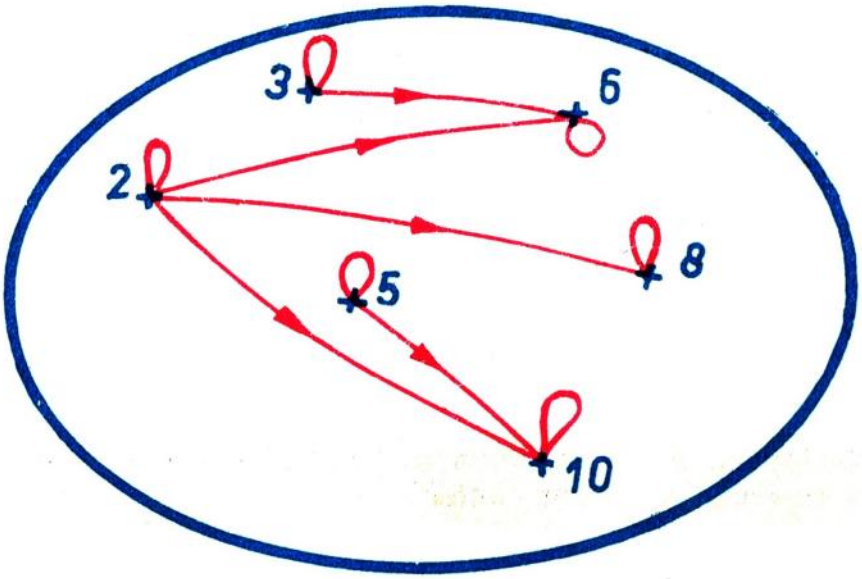
9.1.1

Una relación es reflexiva ssi contiene a I.

(I = conjunto de los ídems.)

Ejemplos:

E = {2, 3, 5, 6, 8, 10}
R = ser divisor de



El grafo de una relación reflexiva tiene un lazo en cada uno de sus puntos.

Ejemplos:

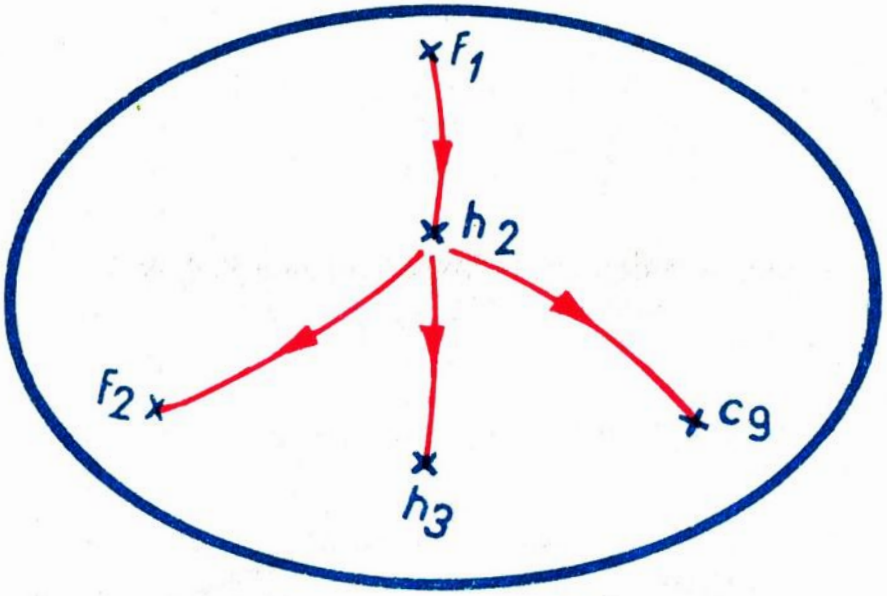
ser el hermano de (en el sentido amplio)
ser paralela a (ídem)
ser divisor de
ser múltiplo de
ser secante a
ser igual a
etc.

9.1.2

Una relación es no-reflexiva ssi es disjunta con I.

Ejemplos:

E = {Francisco I, Enrique II, Francisco II, Enrique III, Carlos IX}
R = ser padre de



El grafo de una relación no-reflexiva no tiene lazo alguno.

Ejemplos:

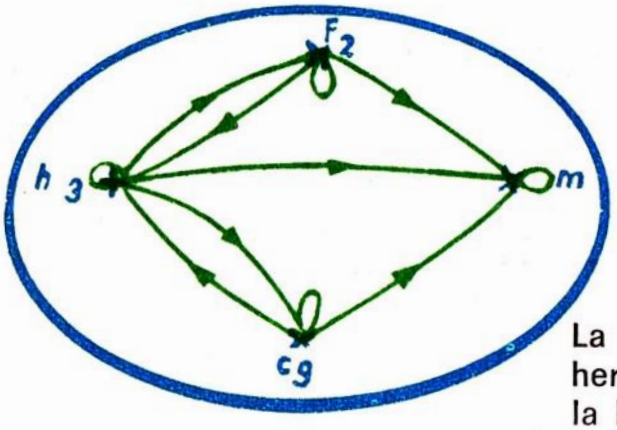
ser el padre de
ser mayor que
ser perpendicular a
etc.

9.1.3

Una relación no es ni reflexiva ni irreflexiva (1) ssi tiene intersección no-vacía con I sin contenerla.

Ejemplos:

E = {Francisco II, Enrique III, Carlos IX, Margarita de Francia}
R = ser hermano de.

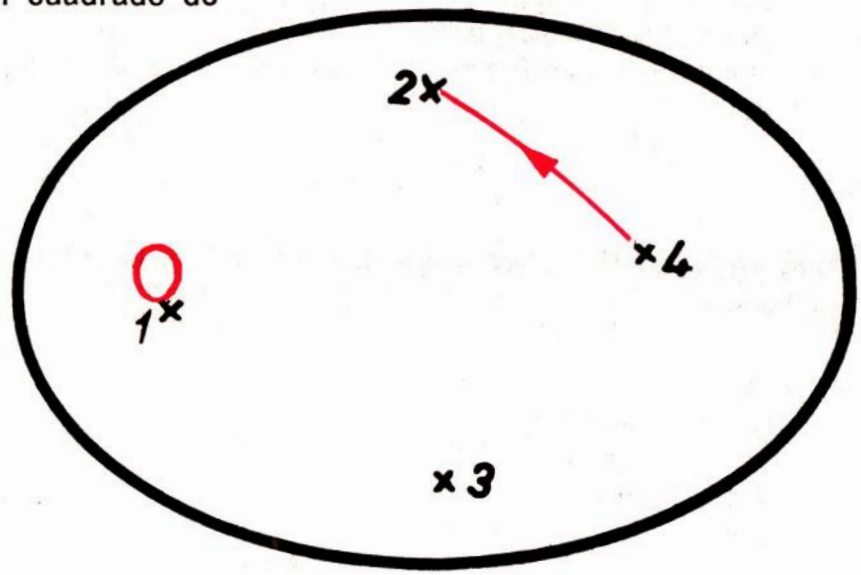


La reina Margarita no es su propia hermana; no es el hermano, sino la **hermana** de los tres reyes.

(1) El vocabulario no tiene, desgraciadamente, ninguna palabra para designar esta propiedad.

Ejemplos:

E = {1, 2, 3, 4}
R = ser el cuadrado de



9.2

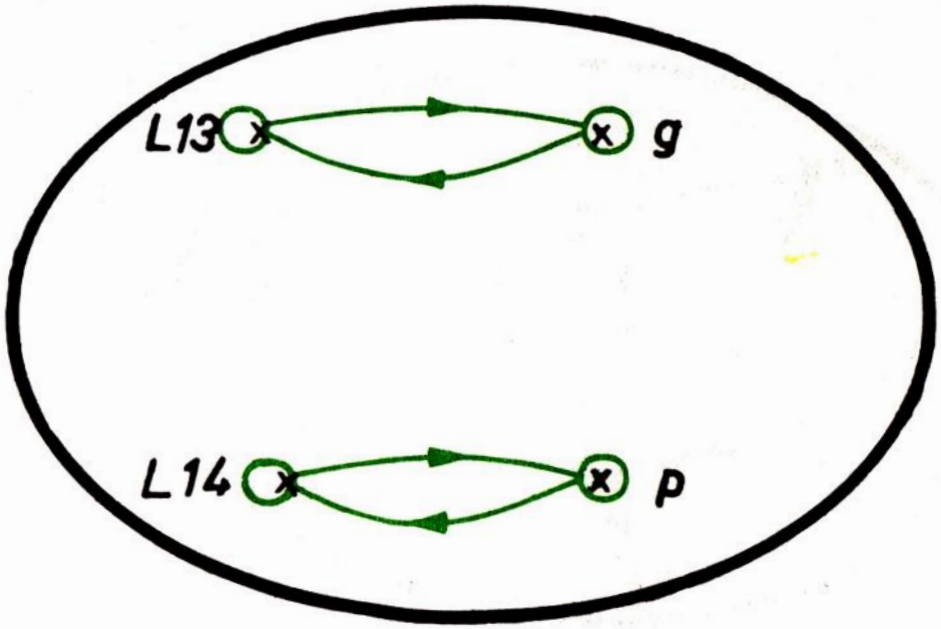
Simetría

9.2.1

Una relación es simétrica ssi es idéntica a su recíproca.

Ejemplos:

E = {Luis XIII, Gastón de Orleáns, Luis XIV, Felipe de Orleáns}
R = ser hermano de



«Ser hermano de» es una relación simétrica en un conjunto de seres masculinos.

Ejemplos:

ser paralela a
ser diferente de
ser perpendicular a
ser primo con (para dos números naturales)
etc.

9.2.2

Una relación R es antisimétrica ssi R ∖ I es disjunta con su recíproca.

Ejemplos:

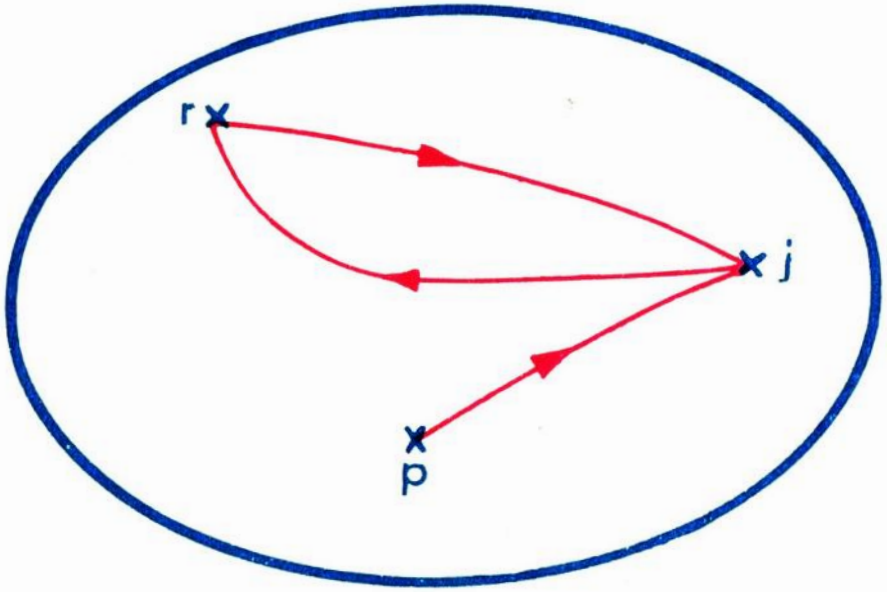
ser el padre de
ser divisor de
ser inferior a
etc.

Una relación R no es ni simétrica ni antisimétrica ssi R ∖ I tiene intersección no-vacía con su recíproca sin serle idéntica.

Así, «amar de amor» no es una relación simétrica. Esta particularidad es la principal fuente de inspiración de toda la literatura romántica, dramática y lírica.

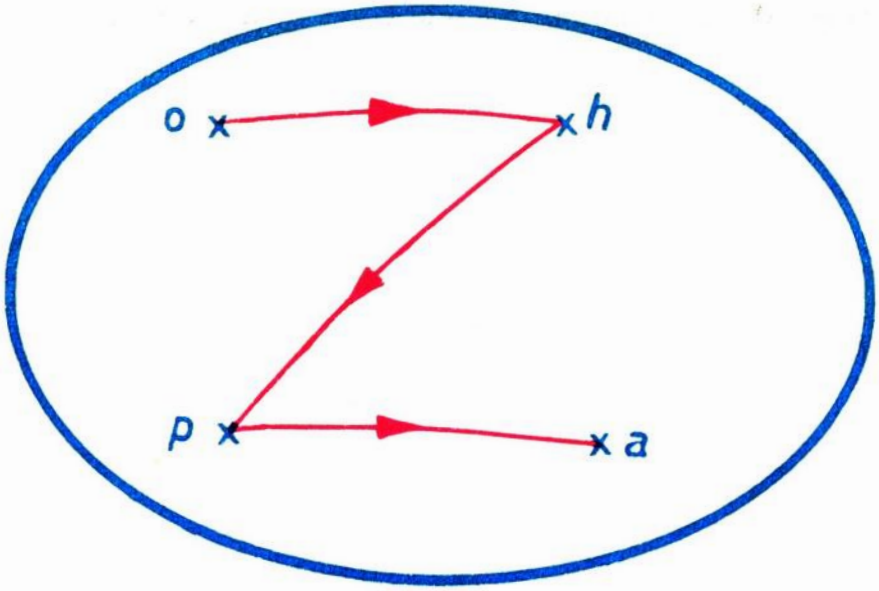
Ejemplos:

E = {Romeo, Julieta, Paris}



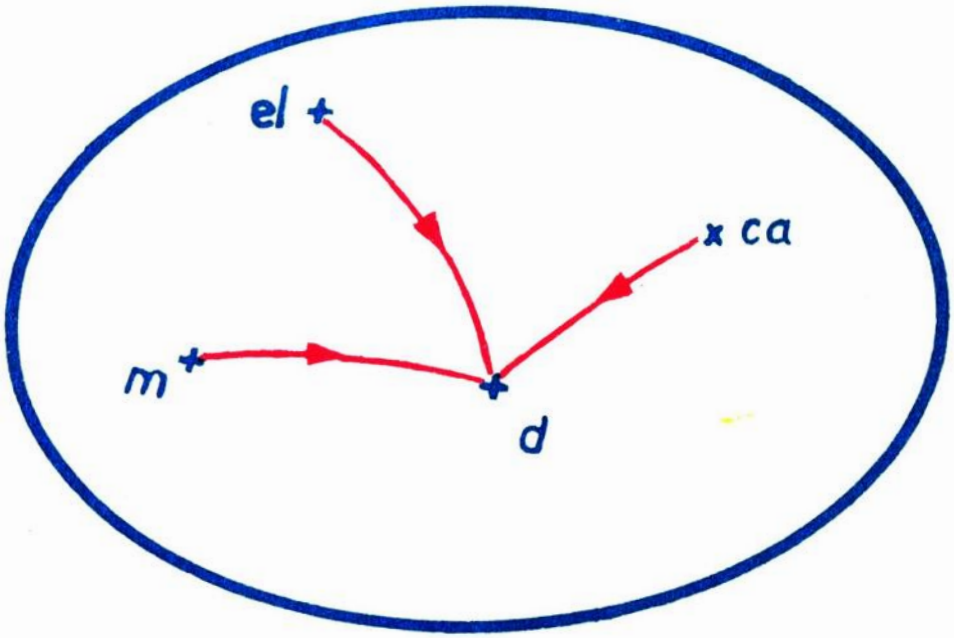
Amar no es simétrica ni antisimétrica en «Romeo y Julieta».

E = {Orestes, Andrómaca, Pirro, Herminio}



Amar es antisimétrica en «Andrómaca».

E = {Don Juan, Elvira, Maturina, Carlota}



Amar es antisimétrica en «Don Juan»

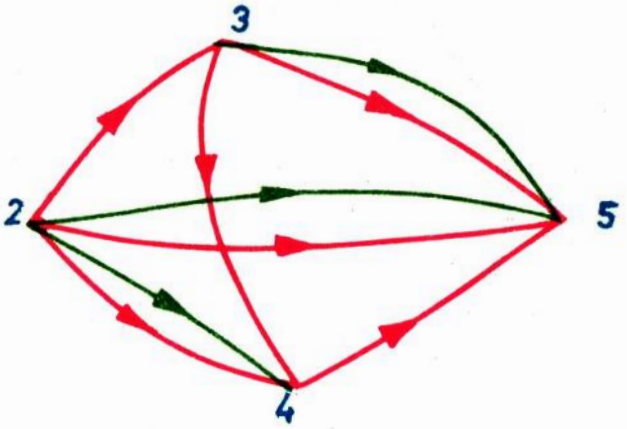
9.3

Transitividad.

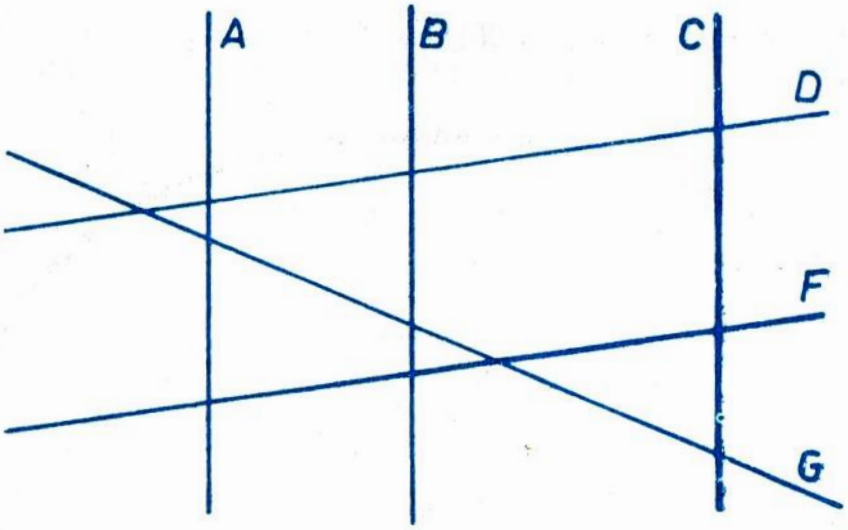
Una relación R es transitiva ssi contiene a su compuesto R o R.

Ejemplos:

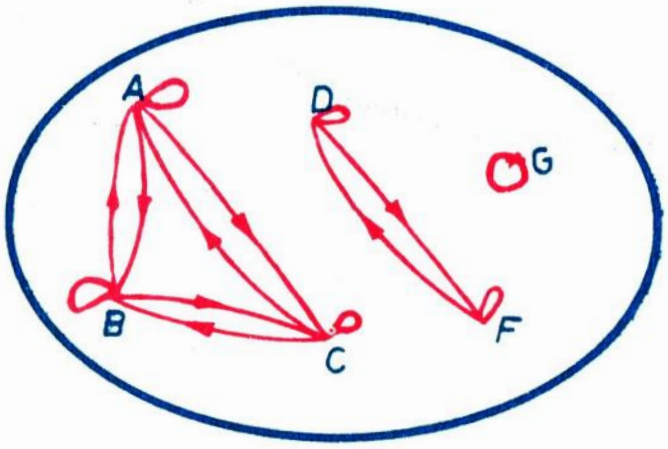
E = {2, 3, 4, 5}
R = ser menor que



R = {(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)}
R o R = {(2, 4), (2, 5), (3, 5)}



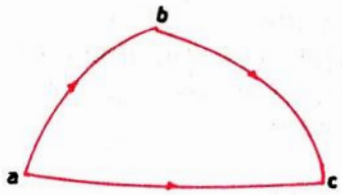
E = {A, B, C, D, F, G}
R = ser paralela a
R o R = R



En el grafo de una relación transitiva:

no se puede encontrar

pero se puede encontrar



a R b
y ⇒ a R c
b R c

a R b
y ⇒ a R a
b R a
y
b R b

Podemos encontrar

a R a
y ⇒ a R a
a R a

a R a
y ⇒ a R b
a R b

a R b
y ⇒ a R b
b R b

a R b no va seguida de ninguna otra pareja.

Ejemplos:

ser igual a
ser paralela a
ser menor que
ser divisor de
estar incluido en
implicar
etc.

9.3.2

Una relación R es intransitiva ssi es disjunta con R o R.

Ejemplos:

ser el padre de
ser el siguiente de (para números enteros)
etc.

Una relación R, que tiene intersección no-vacía con R o R, sin contenerla, no es ni transitiva ni intransitiva.

Ejemplos:

ser distinto de
tener intersección vacía con (para conjuntos)
ser primo con (para números naturales)
etc.

9.4

Podemos describir las propiedades particulares de cada una de las relaciones anteriormente mencionadas:

ser igual que	: reflexiva,	simétrica,	transitiva
ser paralela a	: reflexiva,	simétrica,	transitiva
ser menor o igual que	: reflexiva,	antisimétrica,	transitiva
ser mayor o igual que	: reflexiva,	antisimétrica,	transitiva
ser divisor de	: reflexiva,	antisimétrica,	transitiva
ser múltiplo de	: reflexiva,	antisimétrica,	transitiva
estar incluido en	: reflexiva,	antisimétrica,	transitiva
intersección con (excluyendo ∅)	: reflexiva,	simétrica,	ni transitiva ni intransitiva
no ser primo con (excluyendo 1)	: reflexiva,	simétrica,	ni transitiva ni intransitiva
ser perpendicular a	: irreflexiva,	simétrica,	intransitiva
ser distinto de	: irreflexiva,	simétrica,	ni transitiva ni intransitiva
ser primo con (para dos números naturales)	: irreflexiva,	simétrica,	ni transitiva ni intransitiva

distar entre sí 1 cm (para dos puntos)	: irreflexiva, simétrica,	ni transitiva ni intransitiva
ser el inmediato posterior (para dos números naturales)	: irreflexiva, antisimétrica,	intransitiva
pertenecer a	: irreflexiva, antisimétrica,	ni transitiva ni intransitiva

9.5

Las relaciones que tengan las mismas propiedades serán estudiadas bajo una forma común, incluso si las interpretaciones concretas difieren.

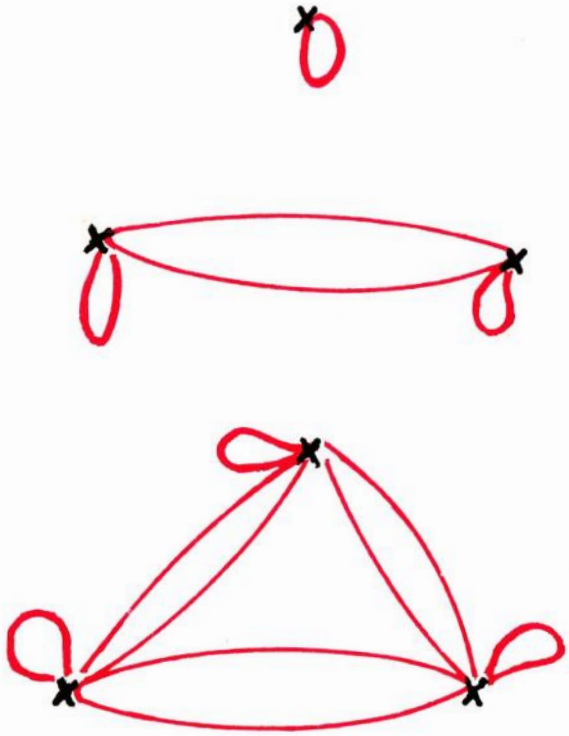
9.6

Relaciones de equivalencia.
Toda relación reflexiva, simétrica y transitiva se llama relación de equivalencia.

Ejemplos:

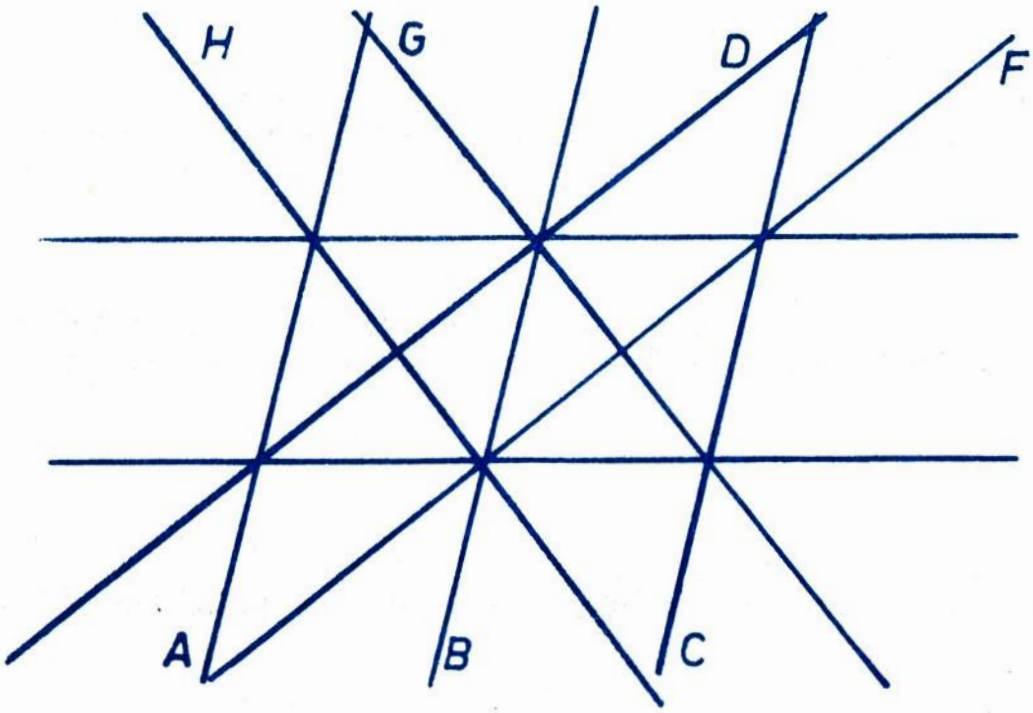
ser igual que
ser paralela a
tener la misma área que (para dos superficies).

El grafo de una relación de equivalencia comprende:



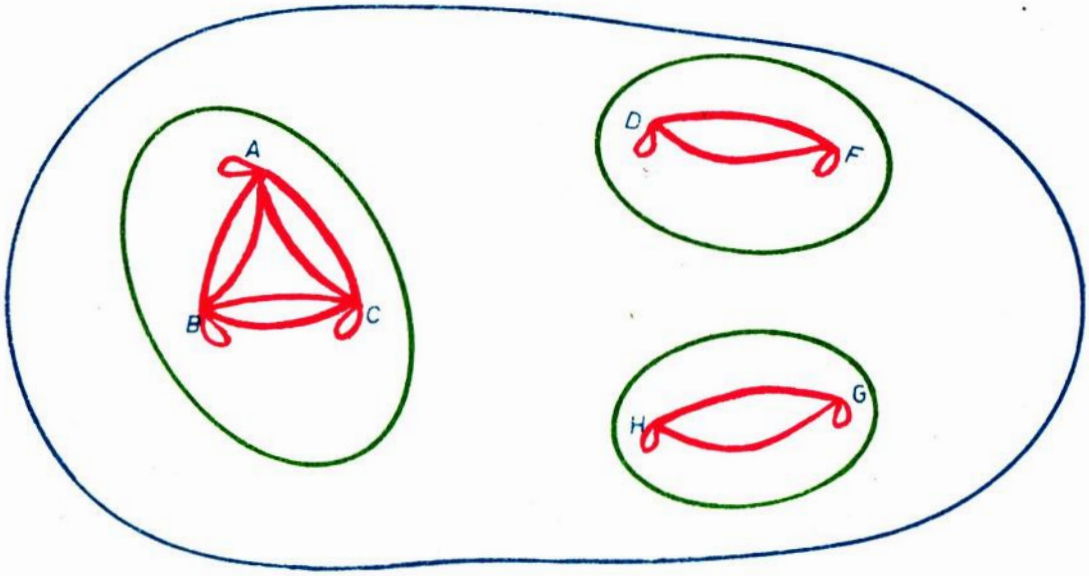
puntos provistos de lazos,
puntos provistos de lazos y unidos simétricamente.

Ejemplo: sea un conjunto de rectas

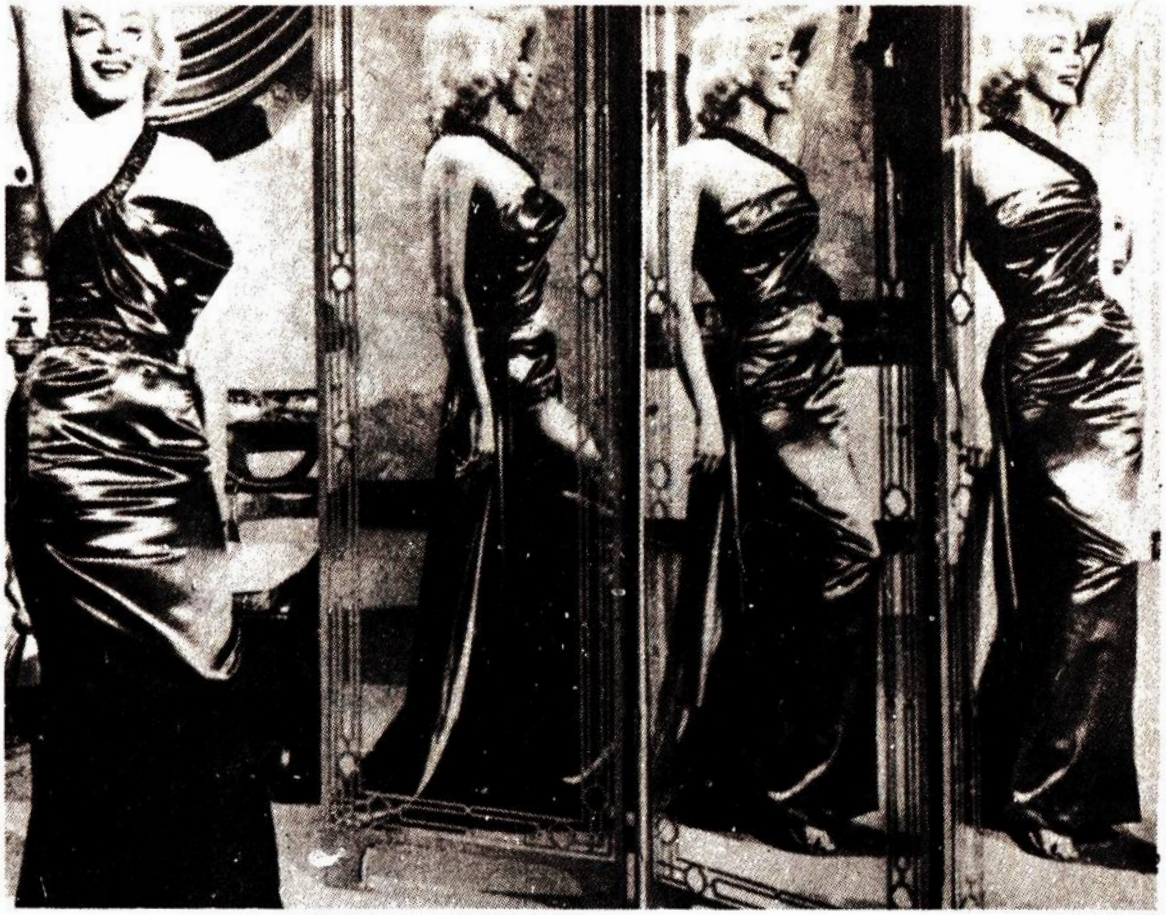


relación: ser paralela a

Grafo:



La relación de equivalencia en E $\times$ E permite hacer una partición de E. Así, en el ejemplo anterior, las rectas A, B, C serán consideradas como equivalentes «en dirección» y el subconjunto A, B, C podrá ser llamado «dirección de A».



Maravillosa relación de equivalencia.

9.7

Relaciones de orden

Toda relación reflexiva, antisimétrica y transitiva se denomina relación de **orden** (en sentido amplio).

Ejemplos: ser menor o igual que, ser divisor de, ser múltiplo de, estar incluido en, etc.

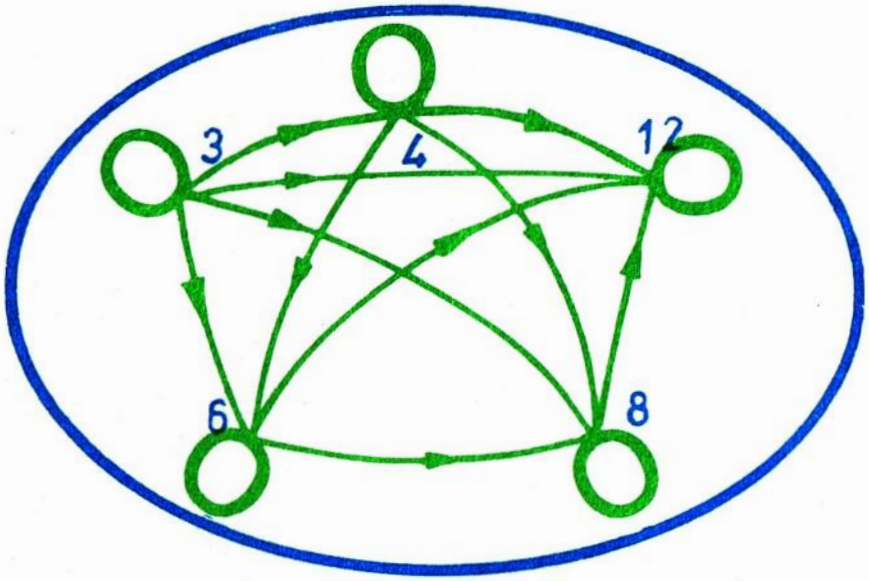
Toda relación irreflexiva, antisimétrica y transitiva se llama relación de **orden estricto.**

Ejemplos: ser menor que, ser ascendente de (en los vínculos de parentesco, ser descendiente de, etc.

Si dos elementos distintos del conjunto E están siempre unidos por una flecha (forman siempre una pareja), la relación de orden se llama **total**; si no, se llama **parcial.**

Ejemplo:

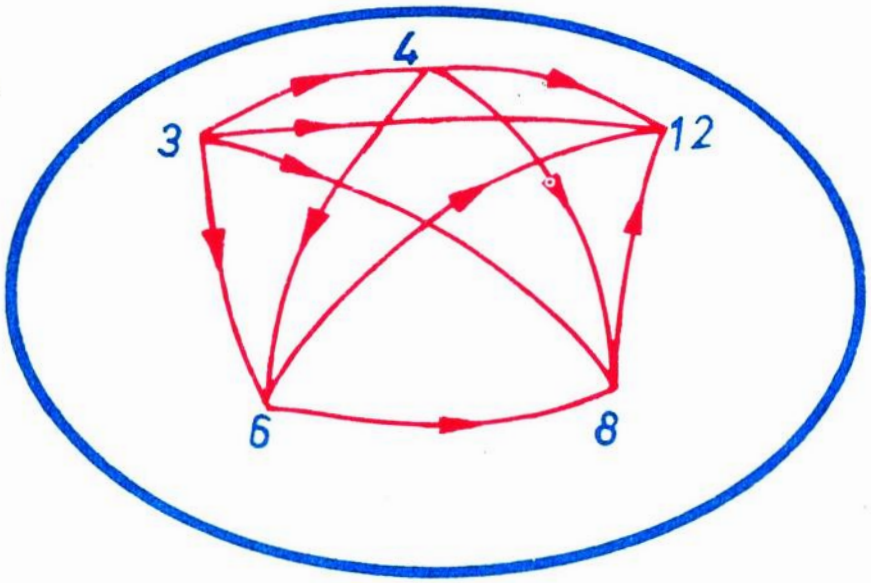
$\leqslant$ en $\{3, 4, 6, 8, 12\}$



El orden es **amplio** y **total.**

Ejemplo:

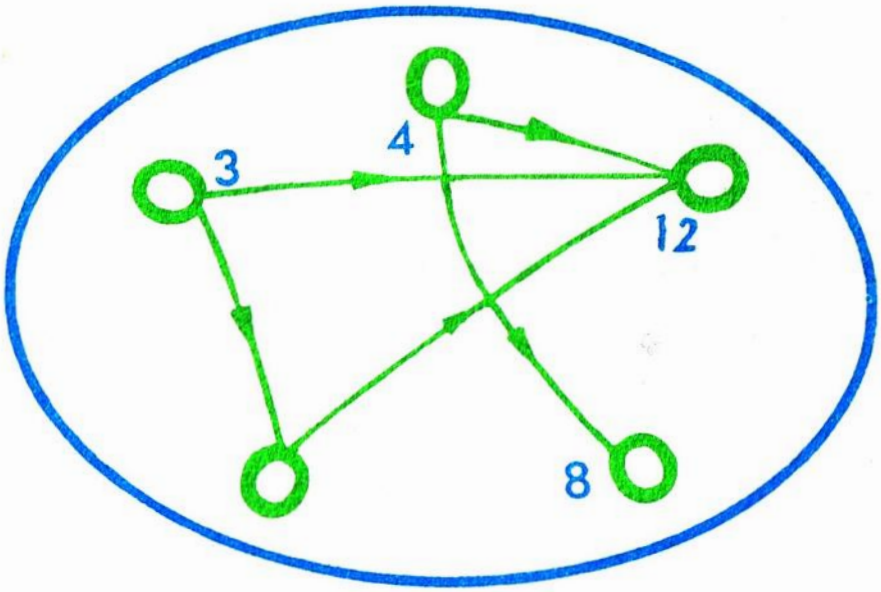
$<$ en $\{3, 4, 6, 8, 12\}$



El orden es **estricto** y **total.**

Ejemplo:

«dividir» por {3, 4, 6, 8, 12}



El orden es **amplio** y **parcial.**

Relación de orden más bien deprimente.

9.8

Reflexividad y simetría.

9.8.1

Consideremos un enunciado como:

«Ravaillac mata a Enrique IV.»

Expresa la pertenencia de una pareja a una relación.
Teóricamente podríamos escribir:

(Ravaillac, Enrique IV) $\in$ matar.

La voz pasiva expresa la pertenencia a la relación recíproca:

«Enrique IV es muerto por Ravaillac.»

Teóricamente podríamos escribir:

(Enrique IV, Ravaillac) $\in$ muerto por;

o también

(Enrique IV, Ravaillac) $\in$ $(\text{matar})^{-1}$

Las formas «activa» y «pasiva» corresponden a la pertenencia a relaciones recíprocas.

9.8.2

El orden de los términos del enunciado proporciona la clasificación de los elementos de la pareja. Este orden no puede ser, por consiguiente, modificado:

«Ravaillac mata a Enrique IV» $\not\Leftrightarrow$ «Enrique IV mata a Ravaillac»

en cuanto a:

«Ravaillac Enrique IV mata»

«Mata Enrique IV Ravaillac»

estas agrupaciones de palabras no tienen sentido.
En latín es la desinencia del caso la que proporciona la clasificación de los términos. El orden puede ser, pues, modificado:

NERO BRITANNICUM NECAT [1]
BRITANNICUM NERO NECAT
NECAT NERO BRITANNICUM
NECAT BRITANNICUM NERO
etc.

En latín, el caso proporciona el equivalente de un «color» para la clasificación de los elementos de la pareja o del trío.

---

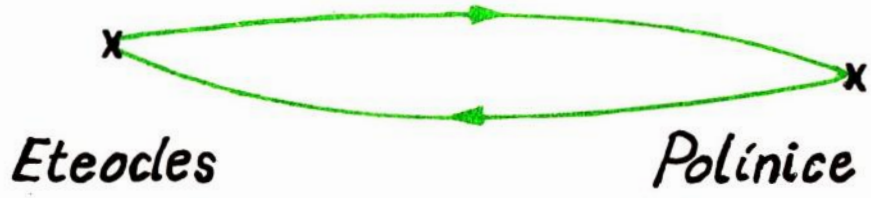
(1) Nerón envenena a Británico.

9.8.3

Sea el enunciado:

«Eteocles y Polínice se matan.»

Si nos referimos a la historia mitológica, traduciremos el enunciado por el grafo siguiente:



El enunciado expresa la pertenencia de las dos parejas recíprocas a una relación simétrica:

(Eteocles, Polínice) ∈ matar

y

(Polínice; Eteocles) ∈ matar.

Sea el enunciado:

«Romeo y Julieta se matan.»

Si nos referimos al relato, traduciremos el enunciado por el grafo siguiente:

El enunciado expresa la pertenencia de los dos «ídems» a una relación reflexiva:

(Romeo, Romeo) ∈ matar

y

(Julieta, Julieta) ∈ matar.

La forma pronominal no permite en el plural distinguir la reflexividad de la simetría [1].

10. Relaciones y correspondencias

Utilizamos con mucha frecuencia «relaciones» en las que el orden de las parejas nos es impuesto por una cierta gestión.

Por ejemplo, si fotografiamos a una persona, cada punto de su rostro forma pareja con su imagen en la película sensible. El conjunto de

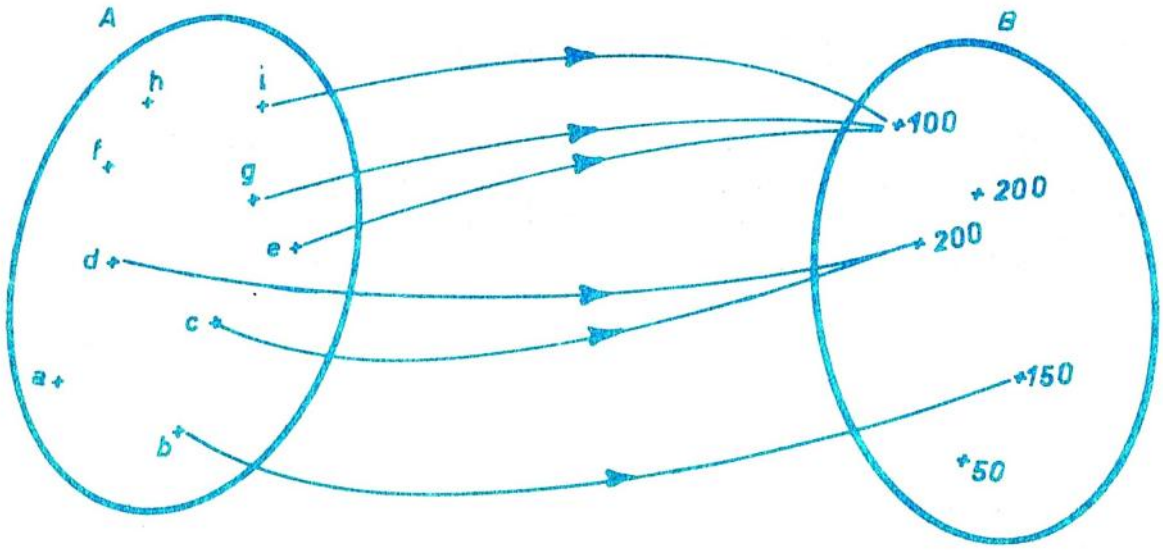
(1) Cuando Jesús dijo: «¡Amaos!», añadió: «los unos a los otros». Sin lo cual algunos se limitarían a reflejar la relación respecto a ellos mismos.

estas parejas es una relación. Sin embargo, la consideraremos en su naturaleza física como orientada desde un punto del rostro (origen) hacia un punto de la película (fin).
En un referéndum todos los ciudadanos de un país votan «sí», «no» o «abstención». El ciudadano Dupont ha expresado uno de estos tres votos. Forma una pareja con su voto.
No obstante, asociaremos con más frecuencia al ciudadano Dupont (origen) con su voto (fin), que no el «sí» como origen a cada uno de los ciudadanos individualizados (fin) que hayan expresado este «sí».
Compro tres libros en casa de un librero. El librero suma los precios y me dice cuánto le debo. Una pareja es, pues, formada gracias al conjunto de los tres libros y al precio global. En esta operación «partimos» de tres libros (origen) para «llegar» al precio global (fin).
La «correspondencia» es una noción vaga; es en realidad una **relación** donde el orden de las parejas se impondrá en un sentido dinámico y significativo.
Lo que cambia, cuando se pasa de la relación a la correspondencia, es esencialmente una cierta forma de considerar las «relaciones», no desde un punto de vista estático, como un conjunto de parejas, sino desde un punto de vista cinemático, como dependencia entre un elemento de llegada y un elemento de partida, susceptible de variar.
Tendremos que poner en evidencia las nuevas propiedades de las relaciones consideradas como correspondencia.
Nos limitaremos a las relaciones **binarias.**

10.1

Funciones.

Ejemplo:
Sea el conjunto de los objetos de esta vitrina. ¿Cuál es el precio de venta de cada uno de estos objetos?



A: conjunto de objetos. B: conjunto de posibles precios.

— Un objeto puede no tener precio (no estar en venta).
— Un objeto no puede tener dos precios.
— Varios objetos pueden tener el mismo precio.
La correspondencia así definida de A hacia B se llama función.
Escribiremos:

$150 = f(b)$
$200 = f(d)$
etc.

Una función de A hacia B es una relación de $A \times B$, puesto que todo elemento de A figura a lo más en una pareja.

Las funciones usadas comúnmente en matemática corresponden a esta definición:

$y = 2x + 3$ (a todo x corresponde un y)
$y = \sqrt{x}$ (a todo x corresponde a lo más un y)
etc.

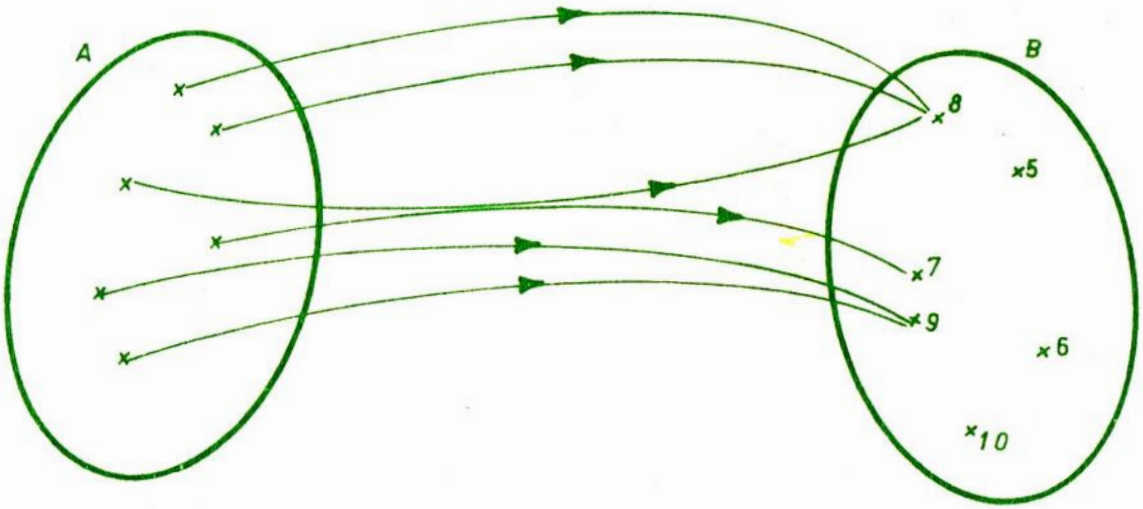
10.2

Aplicaciones.

Ejemplo:

Todos los alumnos de mi clase han entregado un trabajo y este trabajo ha sido corregido.

Hay una correspondencia entre los alumnos y las notas dadas.



A: conjunto de alumnos. B: conjunto de posibles notas.

— Cada alumno recibe una nota por su trabajo.
— Ningún alumno recibe dos notas.
— Varios alumnos pueden recibir la misma nota.
La correspondencia así definida de A hacia B se llama aplicación.

Una aplicación de A hacia B es una relación de A × B, puesto que todo elemento de A figura en una pareja y sólo en una.

Operaciones:

La noción de aplicación proporciona una nueva definición para la noción de operación. Consideremos, por ejemplo, la adición en el conjunto de los números naturales.

A toda pareja en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le asociamos un elemento de $\mathbb{N}$;

$(2, 3) \rightarrow 5$
$(1, 4) \rightarrow 5$
$(2, 7) \rightarrow 9$
etc.

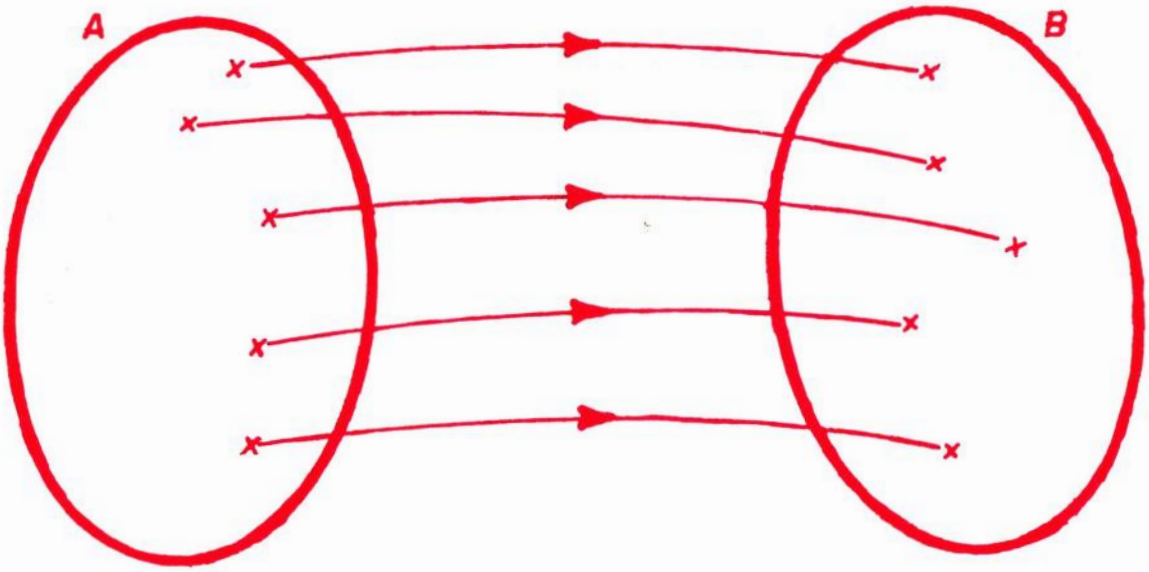
La operación + en $\mathbb{N}$ es, pues, una aplicación de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ hacia $\mathbb{N}$.
La operación — en $\mathbb{N}$ es una función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ hacia $\mathbb{N}$.

10.3

Biyecciones.

Ejemplo:

Cada alumno de mi clase tiene un nombre y sólo uno. Felizmente, dos alumnos de mi clase no tienen nunca el mismo nombre.



A: conjunto de alumnos de mi clase.

B: conjunto de nombres de la lista de la clase.

La correspondencia así definida entre A y B es una **biyección.**

Una relación de A × B es una biyección si es una aplicación de A hacia B y si su recíproca es una aplicación de B hacia A.

La biyección [1] es el origen de la noción de número entero cardinal. Cuando el hombre aprendió a contar con sus dedos, asoció biyectivamente sus dedos con los objetos que contaba.
Para el hombre, «10» es la propiedad cardinal de todo conjunto que pueda ser relacionado biyectivamente con el conjunto de los dedos de sus dos manos. Y «2» es la propiedad cardinal de todo conjunto que pueda ser relacionado biyectivamente con el conjunto de sus manos, de sus orejas, de sus pies, de sus ojos. ¡Por fin surge el número! Pero bastante tarde, al término de una larga exploración con relaciones y correspondencias.

11. ¿El número antes que la relación? ¿La relación antes que el número?

11.1

Para permanecer en los límites normales de esta obra, tenemos que reducir la exposición a lo esencial.
Vendría bien ahora analizar panorámicamente el camino recorrido.
La noción de «relación» es conjuntista. Las relaciones son conjuntos particulares con parejas, tríos y n-uplas como elementos.
La noción de «correspondencia» resulta de una aproximación particular de la noción general de relación.
La noción de «operación» se deduce de las nociones de función, de aplicación y de producto cartesiano (relaciones particulares).
Sobre una aplicación particular —la biyección— se construirá la noción de número natural.
Hemos dejado voluntariamente aparte la noción de transformación, pero es preciso saber que es sobre ella que se construirá la geometría.

11.2

Se comprendera por qué el matemático pedagogo está, hoy, mucho menos forzado a introducir el concepto de número natural.
Es evidente, y jamás podría comprobarse una tan trivial evidencia, que el «número» es necesario en nuestra vida social y que es conveniente aprender a utilizarlo eficazmente.
Pero, desde el punto de vista lógico, no aparece de pronto. Con una enseñanza numérica como la que se daba antiguamente, se correría el riesgo de provocar simples reflejos de memoria a costa de la estructuración lógica.

---

(1) Se llama también «relación biunívoca y recíproca» o también «apareamiento».

¿Queréis un ejemplo?
Preguntad a un niño de cinco años que todavía no sabe contar más que hasta 20, en qué montón hay más botones, después de haberle hecho un montón de 52 botones rojos y otro montón de 54 botones blancos.
El niño, sirviéndose de sus dos manos, formará parejas: un botón rojo y un botón blanco y esto hasta terminar con uno de los montones. Después, contestará a la pregunta.
Procediendo así, materializa una biyección con la mano izquierda y con la mano derecha. Y sin poseer nuestro lenguaje, demuestra que no es necesario conocer los nombres de los números para compararlos.
La moderna pedagogía de la matemática pide que las nociones se construyan bajo un orden coherente.
Proclama su unidad desde el jardín de infancia hasta la universidad. Niega la coexistencia de una «matemática para los pequeños» y de una «matemática para los mayores».
Es evidente que, según las edades, reconoce los distintos niveles del lenguaje, de la experimentación y de la abstracción. Y pide que se utilice para cada uno el vocabulario adecuado. Se asigna por meta la formación de un individuo intelectualmente autónomo y no la fabricación en serie de máquinas de calcular vivas.
Así, cuando se introducirán los números en la enseñanza no habrá ninguna razón para no exigir que su utilización práctica sea eficaz y, por tanto, se destinará al estudio del «número» todo el tiempo que sea necesario.

6

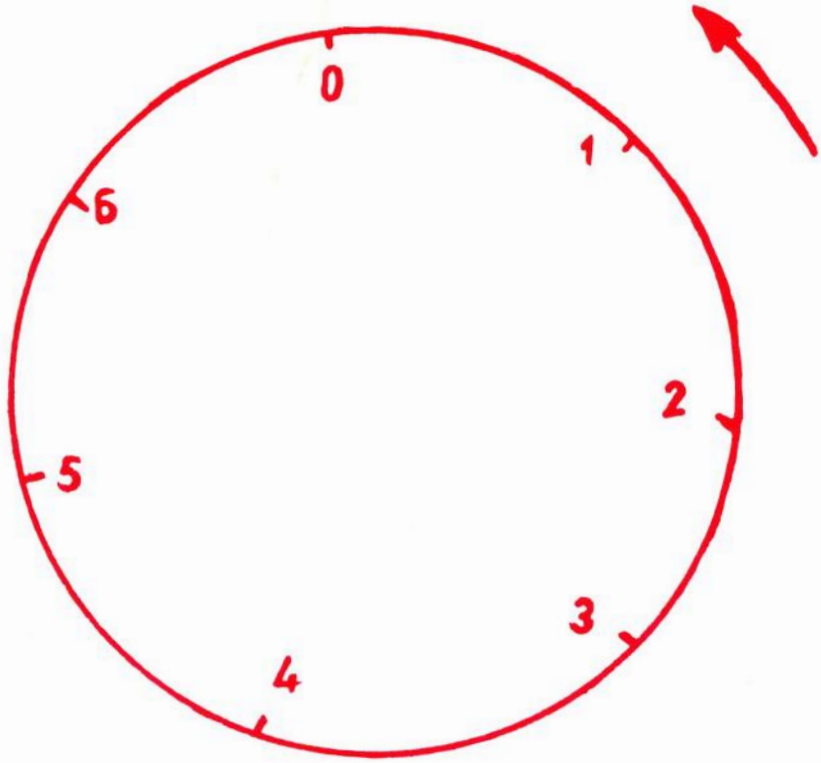
¿QUE ES UNA ESTRUCTURA?

El niño cuenta:
«Uno y uno, son dos;
uno y dos, son muchos;
uno y muchos, son muchos;
muchos y muchos, son muchos».
¡En su universo, cómodamente estructurado, no se angustia por el infinito!

1. Aritmética en la pequeña semana

1.1

Si consideramos el calendario de los días de la semana, podemos asociarle una aritmética muy evidente.
Ante todo, y para simplificar la escritura, podemos representar cada día de la semana por una «cifra».



Lunes = 1
Martes = 2
Miércoles = 3
Jueves = 4
Viernes = 5
Sábado = 6
Domingo = 7 = 0

Todo esto se encuentra materializado en la esfera de un calendario semanal que, cada día, recorre 1/7.ª parte de la vuelta.
Si regulamos nuestra vida tomando como base este calendario, podemos imaginar que:

cada domingo, descansamos;
cada jueves, asistimos a un estreno cinematográfico;
cada viernes, comemos pescado;
cada sábado, hacemos nuestras compras;
etc.

En una palabra, en este universo kafkiano, todos los domingos son equivalentes, y también todos los lunes, martes, etc.
En estas condiciones:

0 representa el conjunto de todos los domingos de la eternidad;
1 representa al conjunto de todos los lunes de la eternidad;
etc.
$J = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1.2

Cada día que pasa hacemos girar nuestro calendario 1/7.ª parte de la vuelta.
Representaremos esta transformación con la operación + 1.

$0 + 1 = 1$ (el lunes es el inmediato posterior al domingo)
$1 + 1 = 2$ (el martes es el inmediato posterior al lunes)
$2 + 1 = 3$ (el miércoles es el inmediato posterior al martes)
$6 + 1 = 0$ (el domingo es el inmediato posterior al sábado).

Podemos también hacer pasos de más de un día. Esto nos dará lugar a operaciones como:

$2 + 3 = 5$
$5 + 4 = 2$
$6 + 6 = 5$
etc.

Estas operaciones asocian un día de la semana a dos días dados. Podremos escribir:

martes + miércoles = viernes.
etc.

Es una **aplicación** del conjunto $J \times J$ en el conjunto J.
Vamos a construir la tabla de la adición y de la sustracción:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

—	0	1	2	3	4	5	6
0	0	6	5	4	3	2	1
1	1	0	6	5	4	3	2
2	2	1	0	6	5	4	3
3	3	2	1	0	6	5	4
4	4	3	2	1	0	6	5
5	5	4	3	2	1	0	6
6	6	5	4	3	2	1	0

1.3

Sobre la tabla podemos comprobar las siguientes propiedades:
Se verifica siempre:

$a + b = b + a$ (conmutativa)
$a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociativa)
$0 + a = a + 0 = a$ (existencia de un elemento neutro).

Para todo a, existe un b tal como:
$\forall\ a\ \exists\ b\ :\ a + b = 0$ existe siempre un b, simétrico de a.
Representaremos por $\bar{a}$ al simétrico de a(en nuestra aritmética $\bar{a} = 7 - a$).
Nos aparece la sustracción como operación inversa de la adición: $a - b = a + \bar{b}$.

1.4

Podemos definir la multiplicación:

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{a \text{ términos}}$$

que nos dará una tabla para la multiplicación y otra para la división:

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

:	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	4	5	2	3	6
2	0	2	1	3	4	6	5
3	0	3	5	1	6	2	4
4	0	4	2	6	1	5	3
5	0	5	6	4	3	1	2
6	0	6	3	2	5	4	1

1.5

Podríamos definir otras operaciones como:

elevación a la potencia n;
extracción de la raíz n-ésima;
logaritmisación en base n.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5^4 &= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \\ &= 4 \qquad \times 5 \times 5 \\ &= \quad 6 \qquad\quad \times 5 \\ &= \qquad 2 \end{aligned}$$

y por tanto:

$$5 = \sqrt[4]{2}$$

En otras palabras: «la raíz jueves-ésima del martes es el miércoles». ¡Tranquilizaos! ¡Encontramos también este enunciado increíble!

Pero si, en lugar de hablar de «días de la semana» hablamos de «números naturales», como se hace en la aritmética tradicional, podemos traducir la expresión:

$$2 = 5^4$$

por el enunciado:

«Si un número da de resto 5 al dividirlo por 7, la potencia cuarta de este número da de resto 2 cuando se le divide por 7».

No pretendemos que este enunciado sea especialmente aprovechable, pero, por lo menos, tiene una significación.

Por lo demás, toda la matemática tradicional tiene interminables rosarios de enunciados de este tipo.

1.6

En vez de trabajar con los «días de la semana», es decir, con los restos de la división por 7, podríamos hacerlo con los «dedos de la mano», es decir, con los restos de la división por 5.

Obtendríamos la tabla:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$$D = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

Y en esta tabla de la aplicación de $D \times D$ en D, encontramos las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro y existencia de un simétrico para todo elemento.

1.7

Habríamos podido trabajar igualmente con los restos de la división por 2, lo que nos habría dado:

$$M = \{0, 1\} \qquad \begin{array}{l} 0 = 2 = 4 = 6 = 8 = \ldots \\ 1 = 3 = 5 = 7 = 9 = \ldots \end{array}$$

Con las tablas de aplicación de $M \times M$ en M:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Estas tablas podrían traducirse en teoremas de la aritmética tradicional:
la suma de dos números de la misma paridad es par;
la suma de dos números de diferente paridad es impar;
el producto de un número par por un número de cualquier paridad es par.
Y en la tabla de la adición, por reducida que sea, observamos que se cumplen las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro y existencia de elemento simétrico (1).

1.8

El señor Dupont no tiene opiniones políticas estables. Al menor acontecimiento cambia de opinión. De momento, no sabe si es de derechas o de izquierdas.

(1) Las propiedades de los restos de la división por n se estudian en aritmética. El álgebra de las operaciones con estos restos se llama «teoría de las congruencias módulo n».

Si el señor Dupont cambia 1, 3, 5, 7, 9 veces de partido, al final habrá cambiado de partido.
Si el señor Dupont cambia 0, 2, 4, 6, 8 ... veces de partido, al final no habrá cambiado de partido.
Podemos escribir:

$0 = 2 = 4 = 6 \ldots$
$1 = 3 = 5 = 7 \ldots$

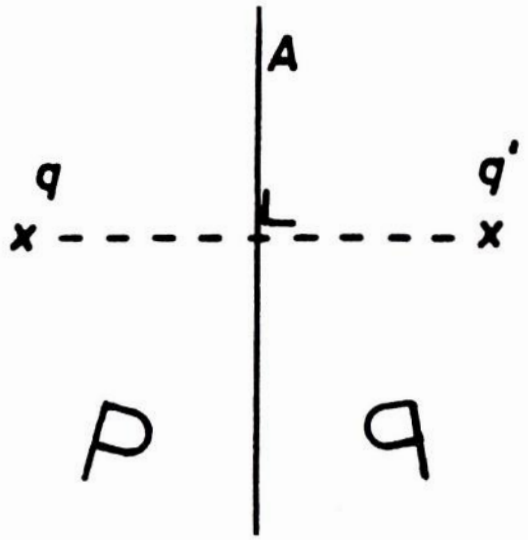
con la tabla

o	0	1
0	0	1
1	1	0

La composición de los cambios de opinión del señor Dupont tienen las mismas propiedades que la aritmética de la paridad.

1.9

Consideremos una simetría axial definida en un plano (conjunto de puntos):



Todo punto (q) del plano se transforma en un nuevo punto (q'). La simetría es un ejemplo de aplicación biyectiva del plano sobre sí mismo.
Toda figura (conjunto de puntos) del plano es transformada por esta simetría.

Representamos por S la simetría axial y escribimos $q' = S(q)$.
Representamos por I la transformación idéntica. Y nos resulta:

$I \circ S = S$
$S \circ I = S$
$I \circ I = I$
$S \circ S = I$

o	I	S
I	I	S
S	S	I

Y volvemos a encontrar otra estructura igual.

2. La estructura en general

2.1

Consideremos el conjunto:

$M = \{a, b\}$ en el que no sabemos lo que son los elementos.

Imaginemos una aplicación de $M \times M$ en M, es decir, una «operación» en M, que representaremos por $\bigstar$. Supongamos que la tabla de esta operación viene dada por:

$\bigstar$	a	b
a	a	b
b	b	a

$a \bigstar a = a$
$a \bigstar b = b$
$b \bigstar a = b$
$b \bigstar b = a$

Esta tabla puede también representar:

las propiedades de paridad en la adición de números naturales;
los cambios de opinión política del señor Dupont;
las composiciones de la simetría axial y de la transformación idéntica en el plano;
y muchas otras cosas.

Todo conjunto particular, con dos elementos perfectamente conocidos, con los que una determinada operación nos da una tabla como la anterior se dice que tiene una estructura $M_{\bigstar}$

Si estudiamos las propiedades generales de esta estructura, podemos particularizar los resultados a cada una de las interpretaciones dadas. Nuestro paso es económico.

2.2

Todo conjunto E, provisto de una operación $\bigstar$ (aplicación de $E \times E$ en E) es una **estructura.**

El camino del matemático consiste:

en abstraer el conjunto E ignorando la naturaleza particular de sus elementos;
en abstraer la operación $\bigstar$ definiéndola por una tabla o por sus propiedades;
en obtener las propiedades generales de la estructura construida de este modo.

Es evidente que el matemático construirá estructuras abstractas cuyas particularidades encajarán en las situaciones encontradas en la acción del hombre sobre el Universo. El álgebra proporciona entonces un lenguaje formal que se puede aplicar a innumerables situaciones particulares.

Al generalizar las estructuras, el matemático expresa de una manera puramente formal un lenguaje cuya concreción está todavía por descubrir.

El matemático, pues, precede al conocimiento concreto de su tiempo y sueña, imagina y crea formas posibles. Es el arquitecto del conocimiento futuro.

El arte abstracto, contrariamente a lo que se piensa a veces, parte de lo real y solamente expresa sus estructuras.
Los límites de esta abstracción dependen de la personalidad del pintor.
Observemos las tres etapas de abstracción del pintor Piet Mondrian:
1910: el árbol rojo.
1911: el árbol plateado.
1912: manzano en flor.

2.3

El estudio de la matemática elemental tal como se practica en el Bachillerato utiliza un cierto número de estructuras, cada una de las cuales lleva un nombre.
Estas son:

— estructura de grupo,
— estructura de anillo,
— estructura de cuerpo,
— estructura de red,
— estructura de ideal,
— estructura de espacio vectorial,
— etc.

Las estructuras de espacio vectorial se dividen en subestructuras diversas según las necesidades de la geometría.

3. Estructura de grupo de orden 4

3.1

Sea una tabla de 4 elementos:

★	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Ignoramos lo que son a, b, c, d y lo que representa la operación.

Tenemos:

$x \star y = y \star x$ (conmutativa)
$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ (asociativa)
$a \star x = x \star a = x$ (a es neutro)
$a \star a = b \star d = c \star c = d \star b = a$
(todo elemento tiene un simétrico).

Estas propiedades definen una estructura particular.
La llamaremos estructura de grupo.

3.2

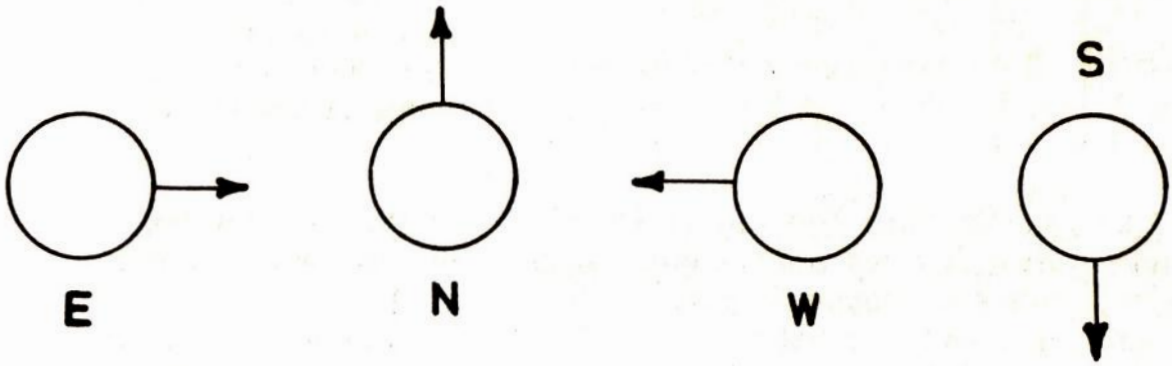
Formemos el «calendario de las estaciones» (o también, sumemos los restos de la división por 4).
Tenemos:

$0 = 4 = 8 = \ldots$
$1 = 5 = 9 = \ldots$
$2 = 6 = 10 = \ldots$
$3 = 7 = 11 = \ldots$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

3.3

Observemos las rotaciones de un disco:



Llamaremos:

E las rotaciones de 0, 4, 8, 12... cuartos de vuelta.
N las rotaciones de 1, 5, 9, 13... cuartos de vuelta.
W las rotaciones de 2, 6, 10, 14... cuartos de vuelta.
S las rotaciones de 3, 7, 11, 15... cuartos de vuelta.

Efectuemos la composición de dos transformaciones del disco.
Por ejemplo:

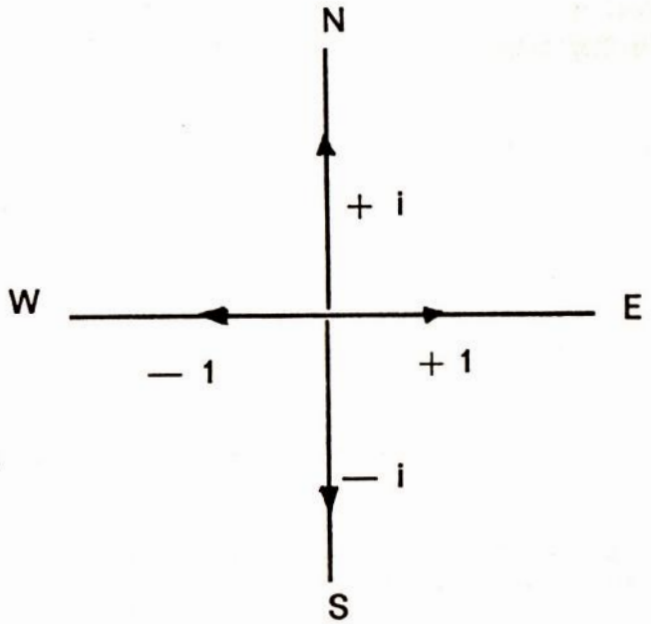
W o N = E.

Obtenemos la tabla (3.1):

o	E	N	W	S
E	E	N	W	S
N	N	W	S	E
W	W	S	E	N
S	S	E	N	W

3.4

Podemos modificar la escritura de la operación disco:



E → + 1

N → + i

W → — 1

S → — i

o → ★

Obtenemos:

★	+ 1	+ i	— 1	— i
+ 1	+ 1	+ i	— 1	— i
+ i	+ i	— 1	— i	+ 1
— 1	— 1	— i	+ 1	+ i
— i	— i	+ 1	+ i	— 1

Donde vemos que:

$i \bigstar i = -1$

Si convenimos en escribir:

$i \bigstar i = i^2$

tenemos que:

$i^2 = -1$

Y nos encontramos con esta misteriosa «raíz cuadrada de menos uno» que aterroriza a los principiantes aunque sólo sea por su nombre mágico: «número imaginario puro».
Decir «$i^2 = -1$» se refiere a: «efectuar dos cuartos de vuelta a la izquierda volviendo a cambiar de sentido»; lo que no es un acto de brujería (1).

3.5

Consideremos el conjunto de cuatro palabras:
E = {viva, la, matemática, moderna}
Un poeta que pertenece a la escuela «permutatoria» decide aplicar E sobre E utilizando cuatro transformaciones descritas en la siguiente tabla:

T0	viva	la	matemática	moderna
T1	la	matemática	moderna	viva
T2	matemática	moderna	viva	la
T3	moderna	viva	la	matemática

Partiendo de la frase:
p — ¿Viva qué moderna? Esto no significa nada. No conozco esta matemática,
después de la transformación T3, nuestro poeta escribe:
T3 (p) = ¿Qué matemática? Esto no significa nada.
¡No conozco moderna, este viva! (2).
La tabla de la composición de estas transformaciones será, pues, (3.1).

0	T0	T1	T2	T3
T0	T0	T1	T2	T3
T1	T1	T2	T3	T0
T2	T2	T3	T0	T1
T3	T3	T0	T1	T2

(1) Un matemático escribirá esta misma evidencia trivial de una manera más prestigiosa: $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Euler).

(2) No pretendemos de ningún modo que esto sea poético. Decimos que es un poco «sorprendente» y que, para algunos, es esto lo que trae consigo la creatividad poética.

4. Grupo del rectángulo (grupo de Klein)

4.1

Con cuatro elementos podemos construir otra estructura que nos permita varias particularizaciones:

★	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Esta tabla no es igual a la anterior. Su estructura es diferente. Sin embargo, encontramos un cierto número de propiedades:

$x \bigstar y = y \bigstar x$ (conmutativa)

$(x \bigstar y) \bigstar z = x \bigstar (y \bigstar z)$ (asociativa)

$a \bigstar x = x \bigstar a = x$ (existe elemento neutro)

$a \bigstar a = b \bigstar b = c \bigstar c = d \bigstar d = a$ (autosimetría)

4.2

Sea un conjunto de números. Consideremos las transformaciones siguientes para cada uno de los números:

$n \rightarrow n$ I = transformación idéntica.

$n \rightarrow \frac{1}{n}$ V = sustitución por el inverso.

$n \rightarrow -n$ P = sustitución por el opuesto.

$n \rightarrow -\frac{1}{n}$ S = sustitución por el opuesto del inverso.

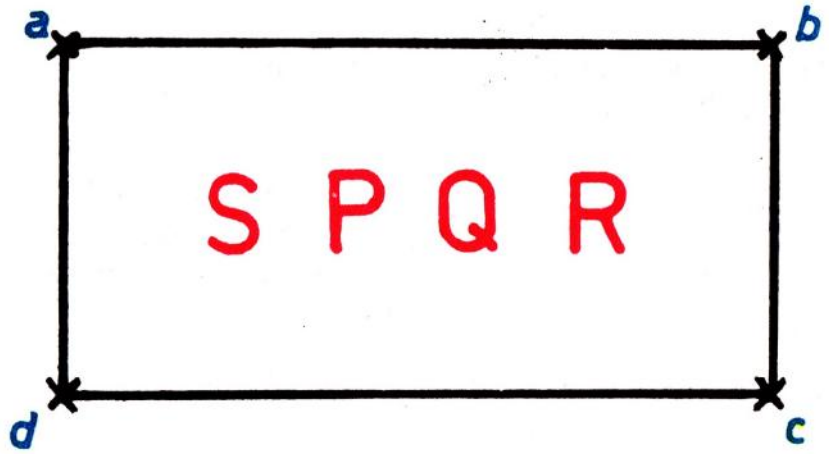
Obtenemos la siguiente tabla, que es idéntica a (4.1):

0	I	V	P	S
I	I	V	P	S
V	V	I	S	P
P	P	S	I	V
S	S	P	V	I

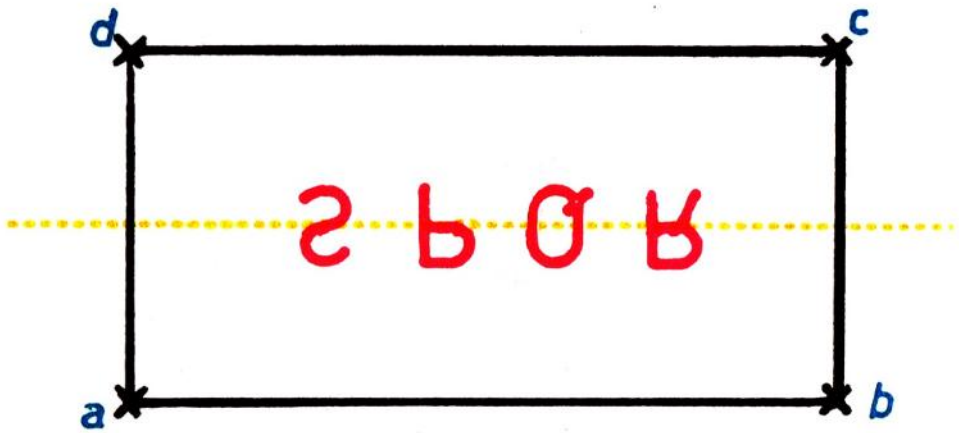
4.3

Consideremos una placa fijada con cuatro tornillos. Decidimos destornillarla para volverla a poner en una determinada posición.

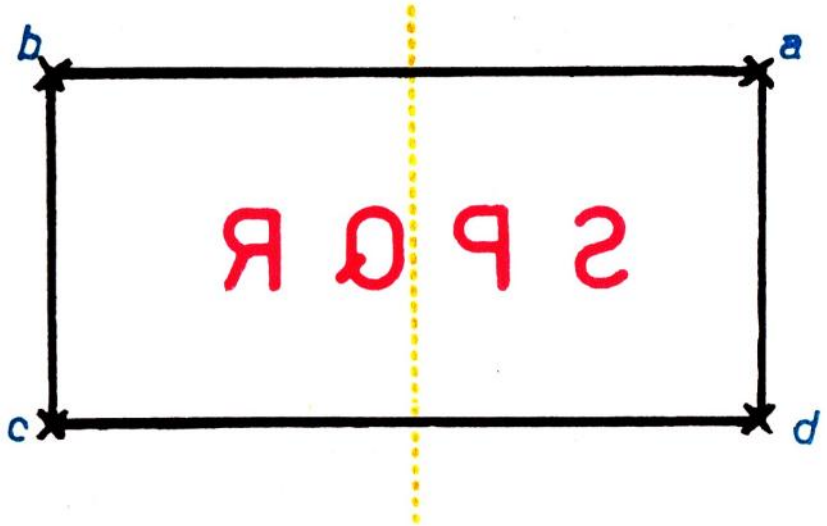
Podemos ponerla tal como estaba (T0):



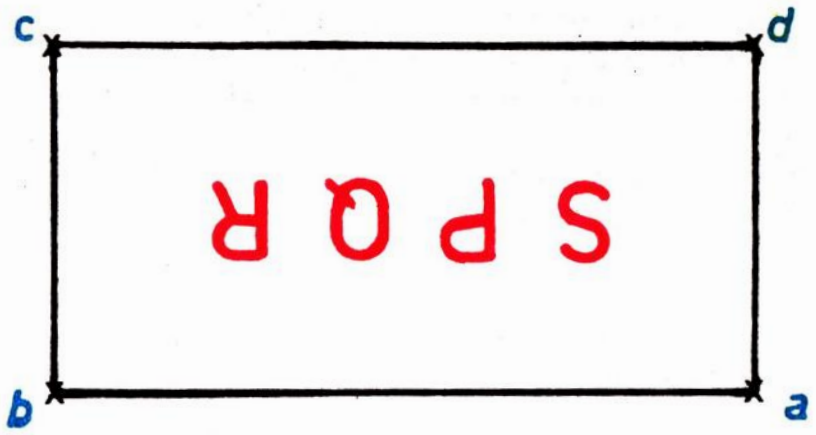
Podemos hacerla girar media vuelta alrededor del eje medio horizontal (T1):



Podemos hacerla girar media vuelta alrededor del eje medio vertical (T2):



Podemos hacerla girar media vuelta alrededor de su centro (T3).



Si componemos dos de estas transformaciones, obtenemos la siguiente tabla, que es idéntica a (4.1):

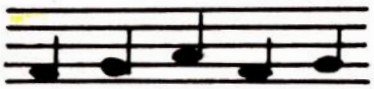
0	T0	T1	T2	T3
T0	T0	T1	T2	T3
T1	T1	T0	T3	T2
T2	T2	T3	T0	T1
T3	T3	T2	T1	T0

4.4

El músico Schönberg, en algunas de sus obras, aplicó la siguiente transformación:

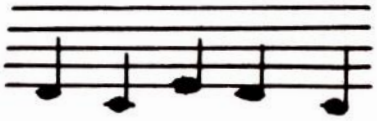
Tema inicial

Transformación T0
(tema idéntico, únicamente transpuesto)



Transformación T1
(simetría de eje horizontal)

Transformación T2
(simetría de eje vertical)



Transformación T3
(rotación de 180°)

La composición de estas transformaciones nos volverá a dar la tabla anterior.
Estas transformaciones se corresponden con las del rectángulo (ejemplo anterior). Es normal que la música sea tratada de la misma manera que un ente que se extiende en dos dimensiones distintas:
altura (tono).
anchura (ritmo, sucesión, tiempo)

4.5

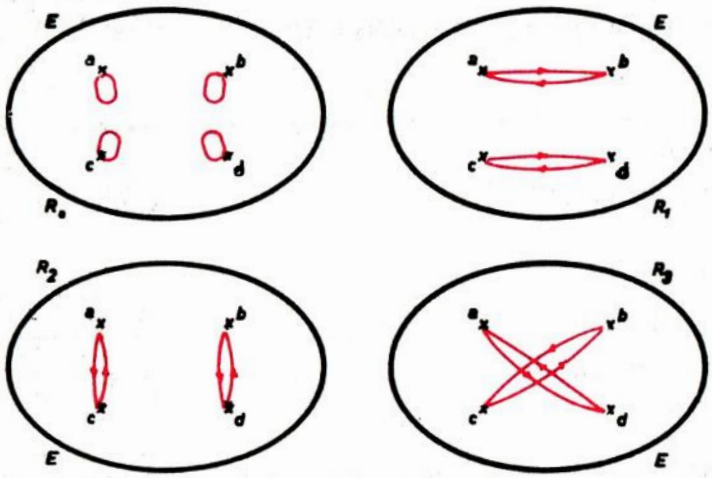
De la misma manera podemos permutar las palabras (u objetos cualesquiera), por ejemplo:

T0	viva	la	matemática	moderna
T1	la	viva	moderna	matemática
T2	moderna	matemática	la	viva
T3	matemática	moderna	viva	la

p = ¿Viva qué? ¡Moderna, no significa nada! No la conozco esta matemática,
se transforma en:
T1 (p) = ¿La qué? ¡Viva, no significa nada! ¡No conozco matemática, esta moderna!
T2 (p) = ¿Moderna qué? ¡Viva, no significa nada! ¡No conozco matemática, esta la!
T3 (p) = ¿Matemática qué? ¡La, no significa nada! ¡No conozco moderna, esta viva!
Y el cuadro de las composiciones de T es el mismo que (4.1).

4.6

En un conjunto de cuatro elementos, la composición de las relaciones:



se construye según el cuadro 4.1.

5. Grupo del triángulo equilátero

5.1

Sea un conjunto E con tres elementos a, b, c.
Podemos considerar seis permutaciones de E sobre E:

$$I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}.$$

Obtenemos un conjunto de seis permutaciones:

$\mathcal{T} = \{I, P, Q, R, S, T\}$.

Podemos componer dos de estas permutaciones.
Por ejemplo: $RoP = S$.
Vamos a deducir la tabla de las composiciones de dos permutaciones (aplicación de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ en $\mathcal{T}$):

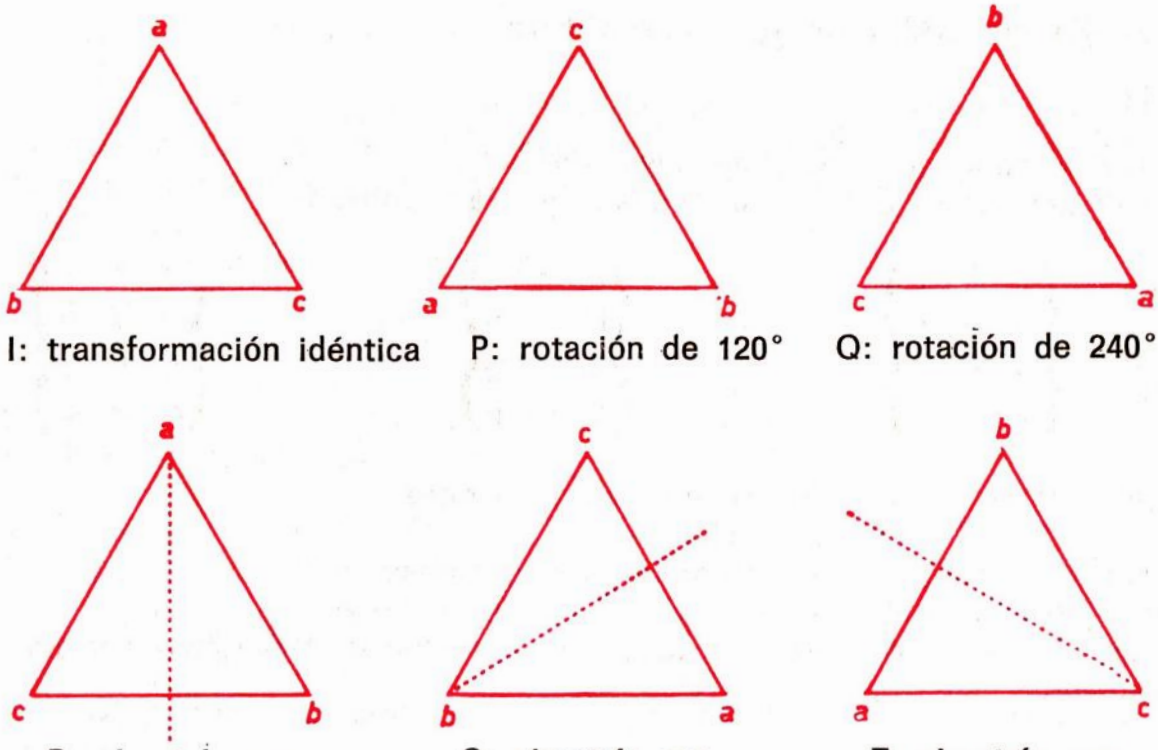
o	I	P	Q	R	S	T
I	I	P	Q	R	S	T
P	P	Q	I	S	T	R
Q	Q	I	P	T	R	S
R	R	T	S	I	Q	P
S	S	R	T	P	I	Q
T	T	S	R	Q	P	I

Esta vez, la operación de composición no es conmutativa.
Por ejemplo: $PoR = T$ $\qquad$ $RoP = S$.
Por el contrario, es asociativa, existe elemento neutro I, y todo elemento puede ser simétrico:

$I^{-1} = I$
$P^{-1} = Q$
$Q^{-1} = P$
$R^{-1} = R$
$S^{-1} = S$
$T^{-1} = T$

5.2

Podríamos concretar estas seis permutaciones imaginándolas como movimientos (con vueltas a la posición primitiva, eventualmente) de un triángulo equilátero sobre sí mismo:



I: transformación idéntica P: rotación de 120° Q: rotación de 240°

R: simetría con respecto a la altura trazada desde a.

S: simetría con respecto a la altura trazada desde b.

T: simetría con respecto a la altura trazada desde c.

6. La estructura de grupo

6.1

Nos hemos encontrado con distintas operaciones particulares que poseen unas mismas propiedades generales, por lo que podemos definir ahora la estructura de grupo (1).

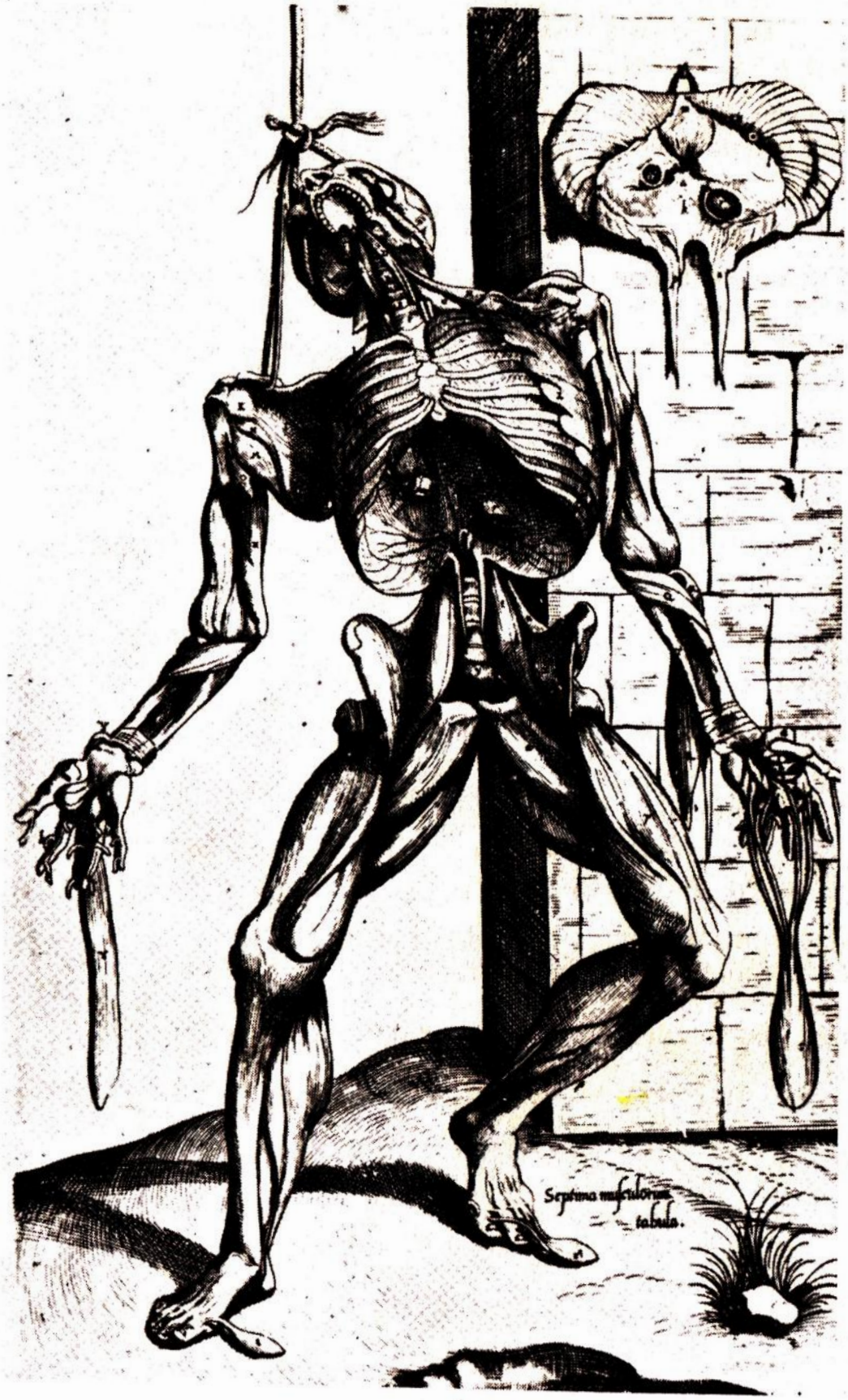
Una operación $\bigstar$ proporciona al conjunto no vacío E una estructura de grupo si

ax_1: $\bigstar$ es una aplicación de $E \times E$ en E
es decir, si para $a \in E$ y $b \in E$ se tiene $a \bigstar b \in E$

ax_2: $\bigstar$ es asociativa
es decir, si $(a \bigstar b) \bigstar c = a \bigstar (b \bigstar c)$

ax_3: existe un elemento neutro
es decir, que para $a \in E$ se tiene $e \bigstar a = a \bigstar e = a$

(1) La estructura de grupo fue definida por Evaristo Galois (1811-1832). Genio revolucionario e incomprendido, Galois murió en un duelo a la edad de 21 años.



El «despellejado», una abstracción estructural del hombre. El esqueleto es otra.

ax_4: E es simetricable
es decir, que para $a \in E$, existe $a^{-1} \in E$ tal que
$a \bigstar a^{-1} \bigstar a = e$.

No es necesario que la operación sea conmutativa. Si lo es, el grupo se llama conmutativo.

6.2

En un grupo se puede resolver la ecuación $a \bigstar x = b$.
En efecto:

$$\begin{aligned} a \bigstar x &= b \\ a^{-1} \bigstar a \bigstar x &= a^{-1} \bigstar b \\ e \bigstar x &= a^{-1} \bigstar b \\ x &= a^{-1} \bigstar b \end{aligned}$$

6.3

El conjunto de las partes de un conjunto provisto de la operación de diferencia simétrica (ver cap. III) es un grupo:

ax_1: En efecto, si $x \in \mathcal{P}(E)$ e $y \in \mathcal{P}(E)$
entonces $(x \triangle y) \in \mathcal{P}(E)$.

ax_2: Se tiene $(x \triangle y) \triangle z = x \triangle (y \triangle z)$.

ax_3 Se tiene $x \triangle \varnothing = \varnothing \triangle x = x$
$\varnothing$ es neutro para $\triangle$.

ax_4: x es el simétrico de x $\quad x^{-1} = x$.
En efecto, $x \triangle x = (x \setminus x) \cup (x \setminus x) = \varnothing$.

Se cumplen los cuatro axiomas de la estructura de grupo.
Además, el grupo es conmutativo:
$x \triangle y = y \triangle x$.
Un grupo conmutativo se llama también grupo abeliano (1).

(1) Este adjetivo proviene del nombre del matemático noruego Niels Abel (1802-1829). A propósito de Galois y Abel se aplica la reflexión de Goethe sobre Mozart: «Dem die götter lieben, rufen sie früh zurüch» (los preferidos de los dioses son pronto llamados a su lado).

La abstracción estructural del hombre puede hacerse
en el plano motor (despellejado);
en el plano armador (esqueleto);
y también a nivel espacial; de aquí este dibujo cubista en pleno Renacimiento.

6.4

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ provisto de la ley de adición $(+)$ no tiene una estructura de grupo.
En efecto, si los axiomas 1, 2, 3 se cumplen, el axioma 4 no.
ax (1) si $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces $a + b \in \mathbb{N}$
ax (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
ax (3) $a + o = o + a = a$
pero no existe ningún número natural tal como:
$1 + x = 2 + y = 3 + z = 4 + t = \ldots = o$.

6.5

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ provisto de la operación de adición $(+)$ tiene estructura de grupo.
En efecto, todo número a posee un simétrico a^{-1}. Lo escribimos $-a$ y se le llama «opuesto de a»:
$a + (-a) = o$.

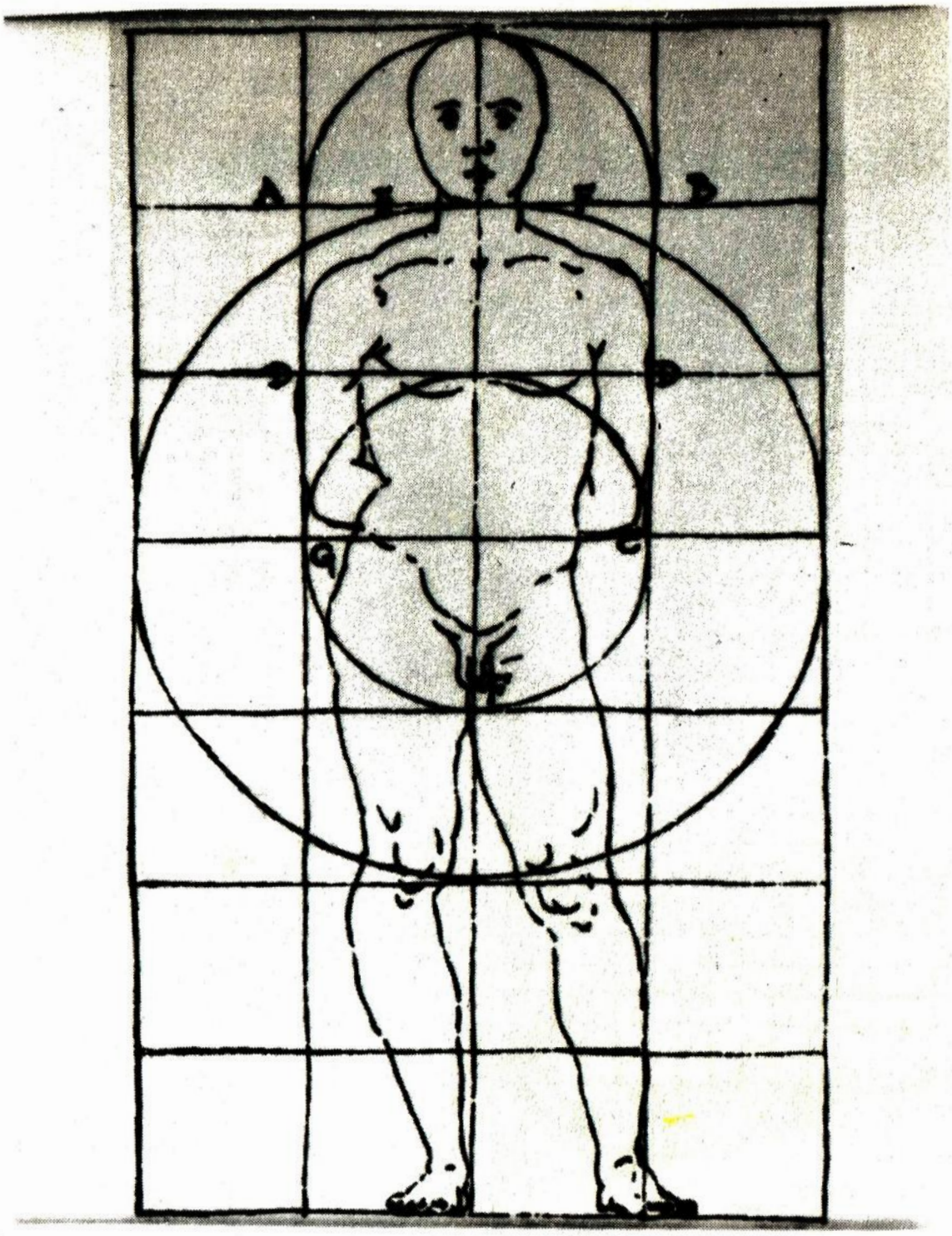
7. Las estructuras de la matemática

7.1

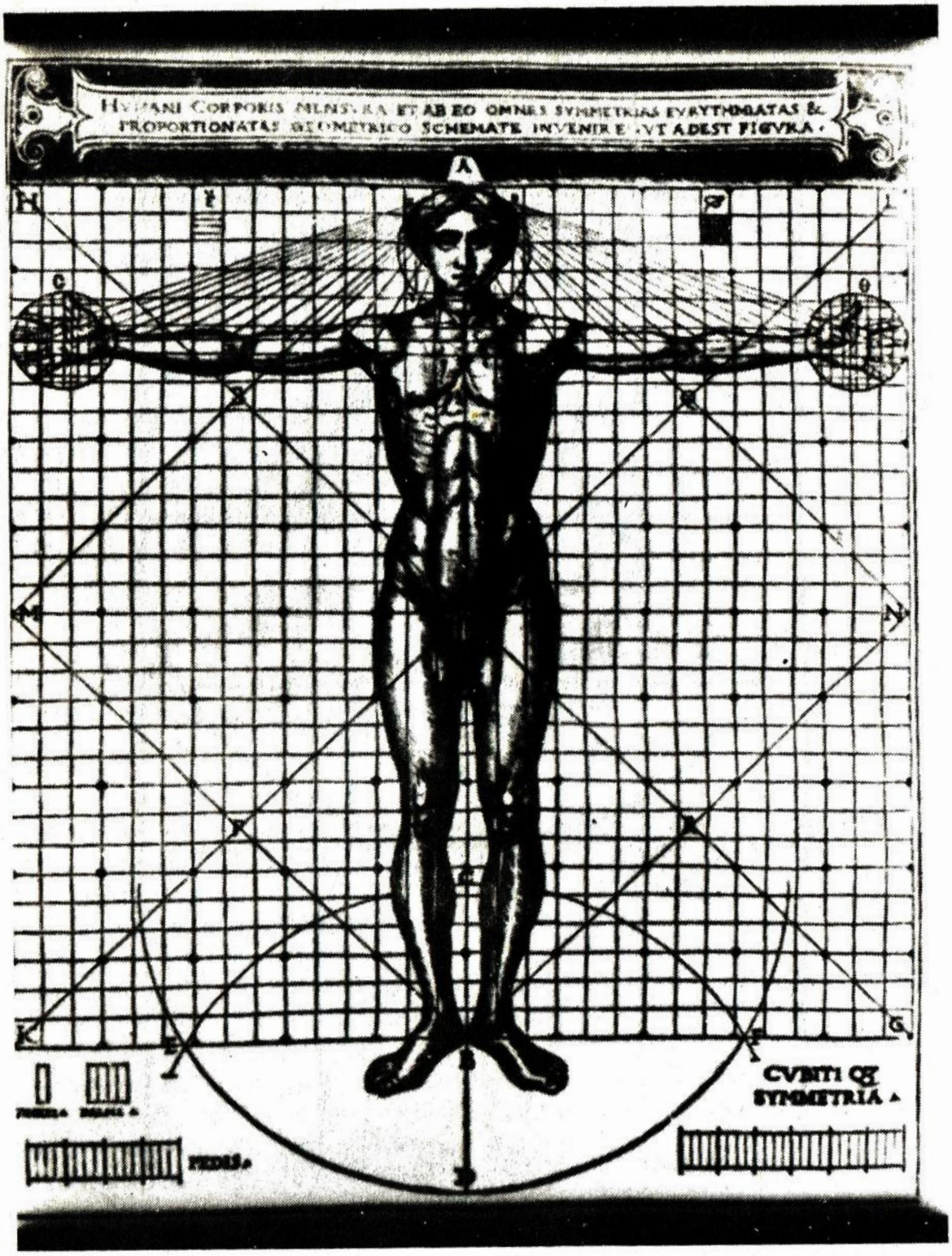
Cualquiera que se relacione un poco con la matemática encuentra
unos conjuntos de seres,
unas operaciones definidas en estos conjuntos,
unas relaciones entre estos conjuntos;
es decir, unas estructuras.
El conocimiento de las propiedades de estas estructuras es necesario para el manejo de los seres matemáticos.
Pero los seres se presentan a menudo con diferentes particularidades.
Su aspecto exterior es lo que tienen en común con otros seres.
Se establece, pues, muchas veces la misma teoría sin tener en cuenta que se emplea siempre el mismo lenguaje.
Desde ahora, describiremos la programación de la nueva pedagogía matemática:

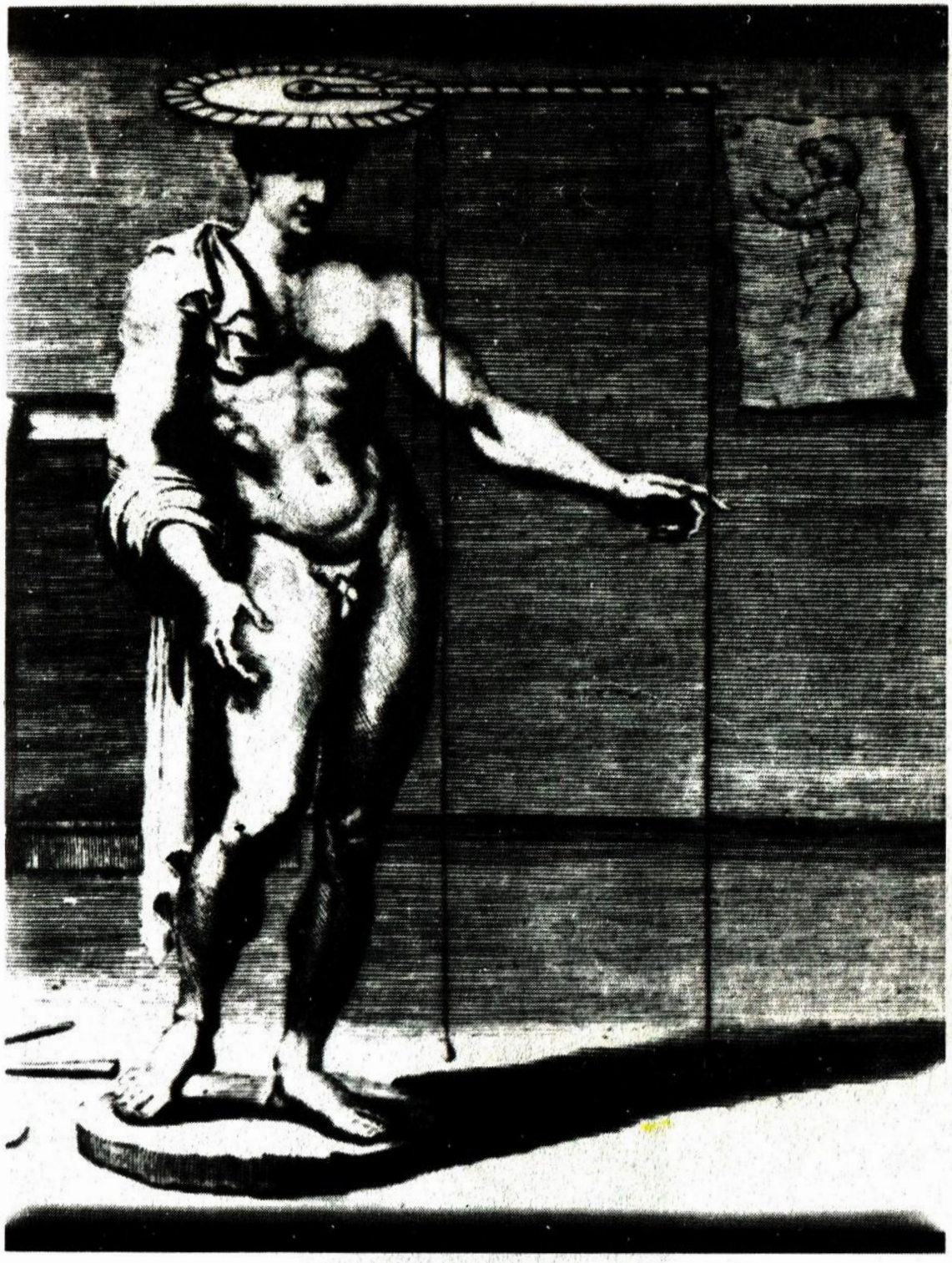
1) La experimentación nos hace construir unos seres matemáticos necesarios: números, puntos, rectas, vectores, etc.; se manejan estos seres; y en los conjuntos que forman se definen operaciones y relaciones.

2) El profesor, que sabe de qué estructura se trata, extraerá las propiedades que la definen, pero se guardará muy bien de introducir la estructura a priori e incluso de darle un nombre como si existiese por sí misma independientemente de sus concreciones.

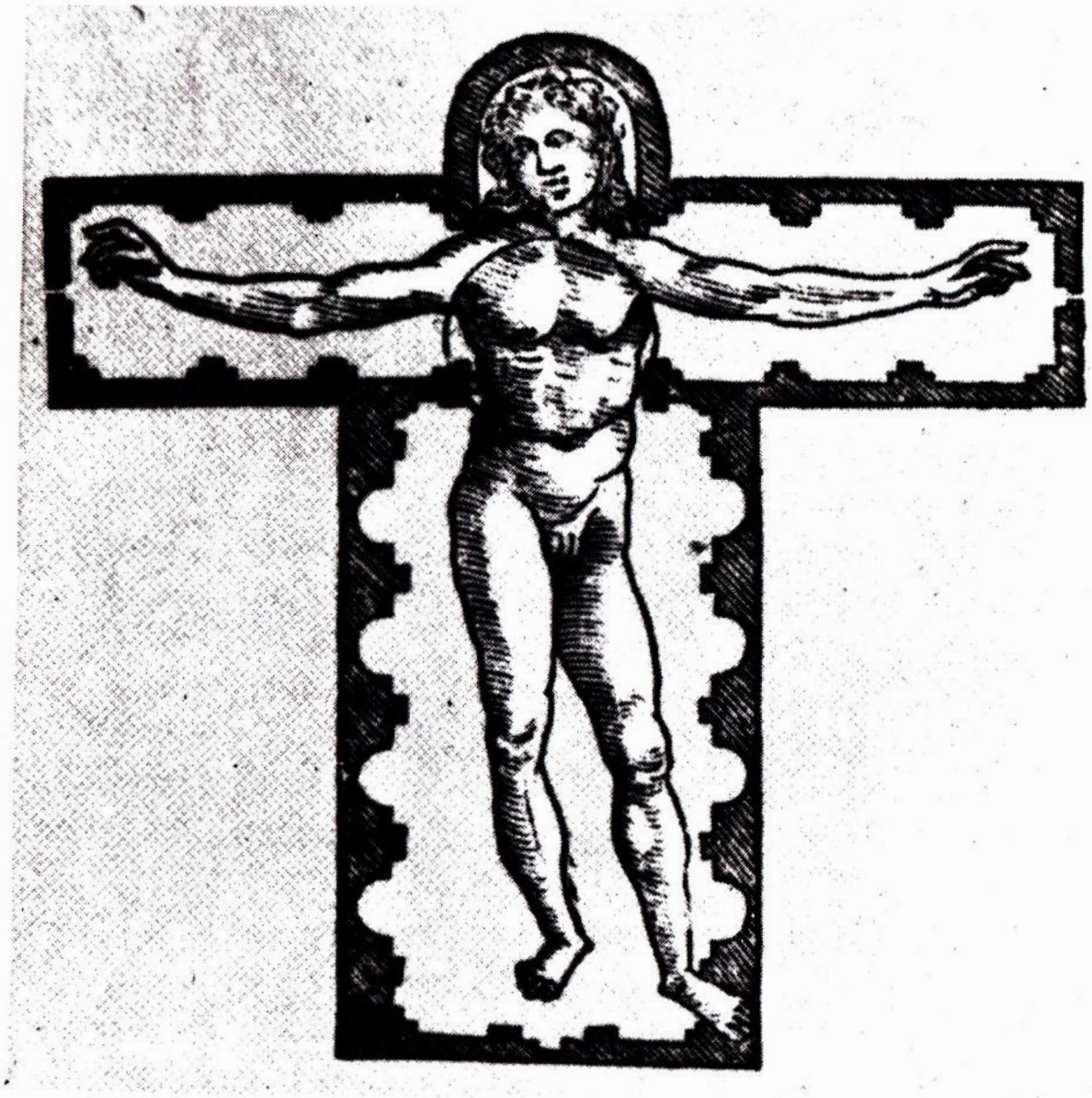


El hombre es la medida de todo.
De aquí las innumerables investigaciones sobre las proporciones naturales del hombre, módulo para la arquitectura.
Esta investigación utópica parte de Vitruvio, arquitecto romano contemporáneo de César, y conduce hasta Le Corbusier con lo Modular.
La relación del hombre con el universo debe encontrarse en las estructuras arquitectónicas.


HVMANI CORPORIS MENSVRA ET AB EO OMNES SYMMETRIAS EVRYTHMATAS &
PROPORTIONATAS GEOMETRICO SCHEMATE INVENIRE VT ADEST FIGVRA
CVBITI QZ
SYMMETRIA
PEDES

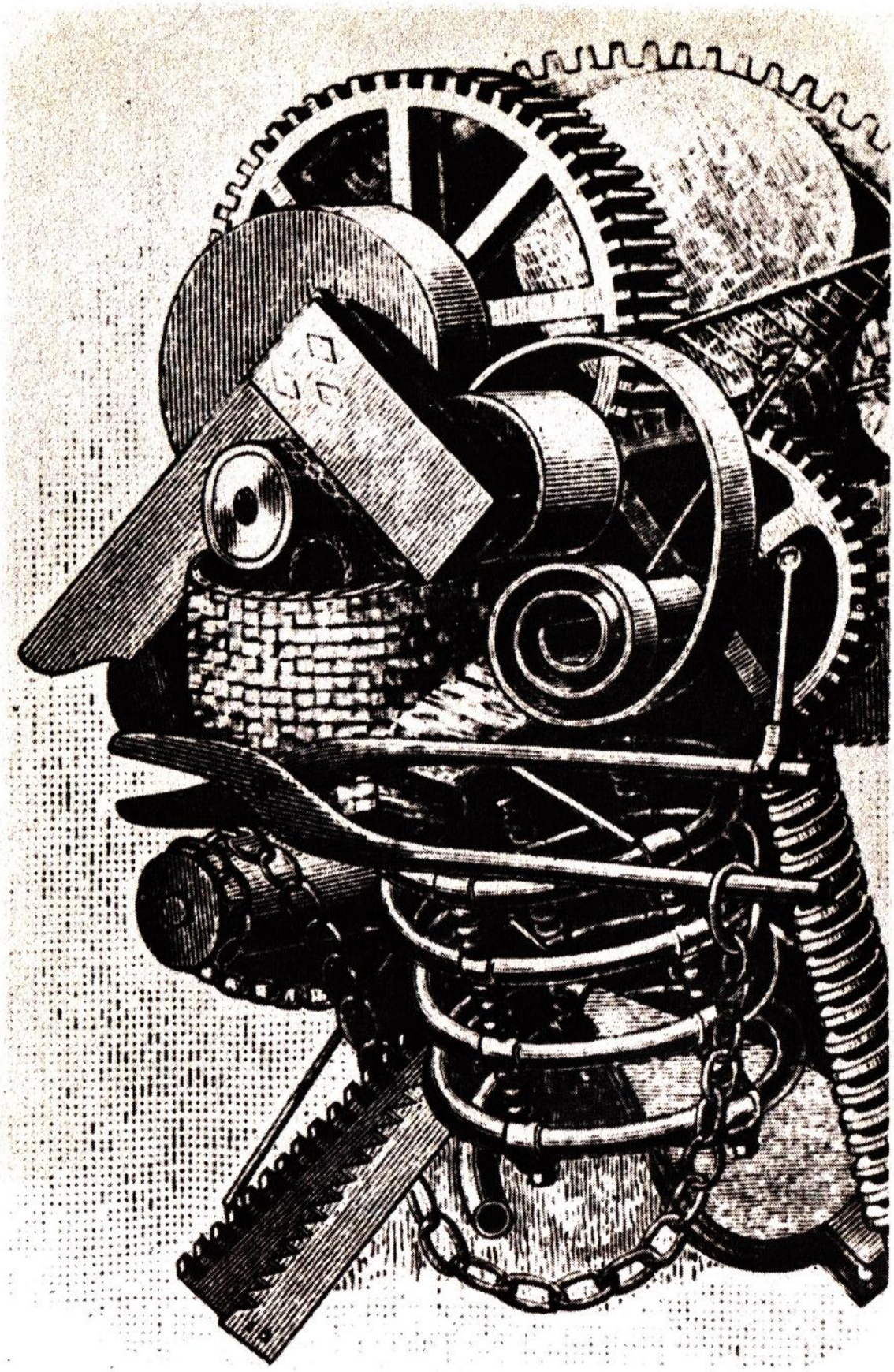


3) El alumno, a fuerza de utilizar seres matemáticos, encuentra muchas veces una misma estructura particularizada de diferentes maneras; a la larga, se cansa de encontrar siempre los mismos resultados; el profesor entonces propone un nombre, las propiedades generales de definición, y construye así la abstracción estructural.



Isomorfismo entre la Iglesia y el Hombre.
Evidente lazo común, ya que la Iglesia tiene forma de cruz latina y es ella la que soporta el cuerpo del Hombre.

Isomorfismo entre el rostro real y el rostro figurado.
¡A nivel de los elementos, no tienen nada de común!
De aquí este pequeño juego para los surrealistas del Renacimiento o los caricaturistas de todos los tiempos.



Retrato del inventor. Finales del siglo XIX.

4) Desde este momento, el alumno posee un arma de trabajo de aplicación general; encadena unas con otras las estructuras y domina este paso fundamental de poder generalizar o concretar, según las necesidades que se le presentan en cada momento.

¡Antropomorfismo!
Es decir, isomorfismo entre las estructuras de un universo y las del hombre.
Aquí es un juego.
En cosmología, filosofía y teología, una tranquilizadora ilusión.

La unidad de las matemáticas está en la abstracción de estructuras comunes.
Por ejemplo, una estructura de grupo puede concretarse lo mismo en el conjunto de los números enteros que en las similitudes del triángulo o en los movimientos del tetraedro sobre sí mismo; una estructura de espacio vectorial describe tan bien las propiedades de los polinomios algebraicos como las de los vectores del plano.
Por esta razón, los matemáticos han decidido hablar de **la matemática** y no de las matemáticas. El empleo del singular o del plural llega a ser un verdadero signo de distinción, una contraseña, e incluso a veces un grito de guerra.
Pronto os daréis cuenta de la tendencia a que pertenecen.
¡Oídlos hablar!

7

PLAN PARA EL ESTUDIO ELEMENTAL DE LOS CONJUNTOS NUMERICOS

Dios hizo los números naturales.
El hombre ha inventado los demás.

Kronecker

1. Conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

1.1

Los matemáticos no están de acuerdo sobre la forma de introducir el número natural. Como siempre, lo más difícil es empezar.
Veamos la manera según la cual, pedagógicamente, puede ser abordado el problema.
Se admite el conjunto vacío.
y se escribe $\#\varnothing = 0$ (el cardinal del conjunto vacío es cero).
Se llama conjunto **unitario** o **singleton** a un conjunto tal que su intersección con cualquier otro conjunto sea él mismo o el vacío.

$$A \text{ es un singleton ssi } \forall X : A \cap X = \begin{cases} \varnothing \\ \text{o bien} \\ A \end{cases}$$

se escribe $\#A = 1$ (el cardinal de un singleton es 1).

Si el singleton A es disjunto de B, el cardinal de $A \cup B$ se llama «inmediato sucesor» del cardinal de B:

$$\# A = 1 \text{ y } A \cap B = \emptyset \Rightarrow \# (A \cup B) = \text{suc.} \# B$$
$$\# A = 1 \text{ y } A \cap B = B \Rightarrow \# (A \cup B) = \# B$$

Los inmediatos sucesores son entonces «llamados» y «escritos»:

0, 1, 2, 3, 4, ...

Admitimos que esta construcción puede prolongarse indefinidamente, es decir, que todo número natural tiene un sucesor.

Dos conjuntos son coordinables (del mismo cardinal) ssi se puede establecer entre ellos una biyección.

Si se puede aplicar inyectivamente un conjunto A en un conjunto B se dice que $\# A \leqslant \# B$.

Entre los números cardinales existe, entonces, un orden total.

1.2

Se define la adición de dos números cardinales por:

$\# (A \cup B) = \# A + \# B$, de donde $A \cap B = \emptyset$.

Las propiedades de la adición son:

conmutativa,
asociativa,
0 es el elemento neutro;

los elementos de este conjunto no admiten simétricos.

Se define la sustracción por:

$x = a - b \Leftrightarrow x + b = a$ con $a \geqslant b$.

Se define la multiplicación por:

$\# (A \times B) = (\# A) \times (\# B)$.

Las propiedades de la multiplicación son:

conmutativa,
asociativa,
1 es el elemento neutro,
0 es absorbente;

los elementos de este conjunto no admiten simétricos:

$\times$ es distributiva con respecto a $+$
con respecto a $-$

Se define la división por:

$x = a : b \Leftrightarrow b \times x = a$ con $a =$ múltiplo de b.

La relación «ser divisor de» introduce un «orden parcial» en el conjunto de los números naturales. Esta relación nos permite definir nuevas operaciones:

— formación del máximo común divisor,
— formación del mínimo común múltiplo.

Así obtendremos una estructura de **red.**

1.3

La escritura de los números naturales plantea un problema que ha sido resuelto de distintas maneras según las civilizaciones.

1.3.1

Primitivamente, el hombre escribió los números dibujando un conjunto que era biyectivo con el conjunto a representar, y, hasta cierto punto, más manejable.
Un rebaño se contará con un conjunto de guijarros, o de conchas, o de muescas en un palo, o de trazos en una pared, etc.
Tenemos todavía huellas de esta manera de numerar en nuestra civilización, donde el número debe ser percibido hasta por un analfabeto: dominós, cartas de una baraja, campanadas de un reloj, etc.
Este método de numeración no permite representar números muy grandes.

1.3.2

Algunas sociedades les dieron un nombre específico y un signo (símbolo numérico) para cada número. En nuestro caso son del cero al nueve.

1.3.3

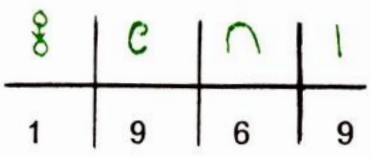
La combinación de estas dos escrituras proporciona un método mixto más cómodo.
Así, la numeración egipcia:

1	10	100	1000	10 000

El año en que el hombre ha puesto el pie en la luna se escribe:

1.3.4

La numeración de «posición», que es la nuestra, resume la escritura sustituyendo:
— el símbolo numérico por una posición,
— el número de veces que este símbolo está escrito por una cifra:



1	9	6	9

o también

10^3	10^2	10^1	10^0
1	9	6	9

La escritura «ligada» hace desaparecer las casillas sustituyéndolas por sus títulos: 1969.
Esta representación necesita de un signo para indicar la falta de un símbolo. Este signo es el **cero.**

Los griegos y los romanos no utilizaron el cero. Los caldeos, los hindúes, los árabes y los mayas lo utilizaron.

1.3.5

Nosotros utilizamos el sistema «decimal» (de base 10) porque tenemos 10 dedos, y nos servimos de ellos para contar (biyección entre un conjunto de dedos y un conjunto con elementos cualesquiera).
Se podría trabajar sobre otra base. La utilización de ordenadores obliga a emplear la base **dos** para el lenguaje de la máquina.
Es el cálculo binario.
El cálculo binario no utiliza más que dos cifras: 0, 1.
Su escritura está unida a la expresión de las potencias sucesivas de 2 para la posición de la cifra 1.

2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	$2^0=1$
	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1

El número que escribimos en sistema binario:

11110110001

se escribe en sistema decimal:

$$2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^0$$

$$= 1024 + 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 1$$

$$= 1969.$$

He aquí la tabla de los 64 primeros términos escritos en el sistema binario:

0	0	10000	16	100000	32	110000	48
1	1	10001	17	100001	33	110001	49
10	2	10010	18	100010	34	110010	50
11	3	10011	19	100011	35	110011	51
100	4	10100	20	100100	36	110100	52
101	5	10101	21	100101	37	110101	53
110	6	10110	22	100110	38	110110	54
111	7	10111	23	100111	39	110111	55
1000	8	11000	24	101000	40	111000	56
1001	9	11001	25	101001	41	111001	57
1010	10	11010	26	101010	42	111010	58
1011	11	11011	27	101011	43	111011	59
1100	12	11100	28	101100	44	111100	60
1101	13	11101	29	101101	45	111101	61
1110	14	11110	30	101110	46	111110	62
1111	15	11111	31	101111	47	111111	63

La tabla de adición y multiplicación es:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

De aquí operaciones tales como:

$$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 21 \\ \hline 46 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11001 \\ +\ 10101 \\ \hline 101110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \times\ 5 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ \times\ 101 \\ \hline 1001 \\ 0000 \\ 1001 \\ \hline 101101 \end{array}$$

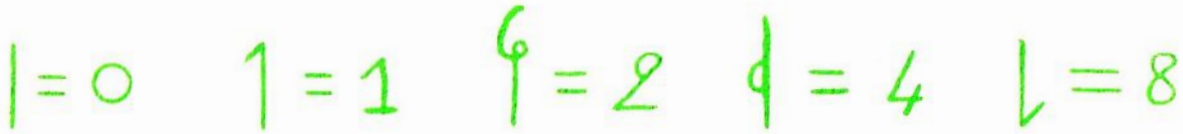
A priori, el sistema de numeración binario no es más complicado que el sistema decimal. Para el niño que aprende a escribir y a contar, ambos le resultan iguales en dificultad.
Para nosotros, que estamos deformados por el uso cotidiano del sistema decimal, nos resulta difícil pasar al sistema binario. Algunos ingenuos se imaginan que el cálculo binario (simple convenio de escritura) es la matemática moderna.
El ordenador reclama el «binario» por la sencillez de su código:
— luz encendida = 1 (o casilla perforada)
— luz apagada = 0 (o casilla no perforada).
Entre el hombre, deformado por el sistema decimal, y el ordenador es necesario un mecanismo que traduce la escritura de los números de un sistema a otro.

1.3.6

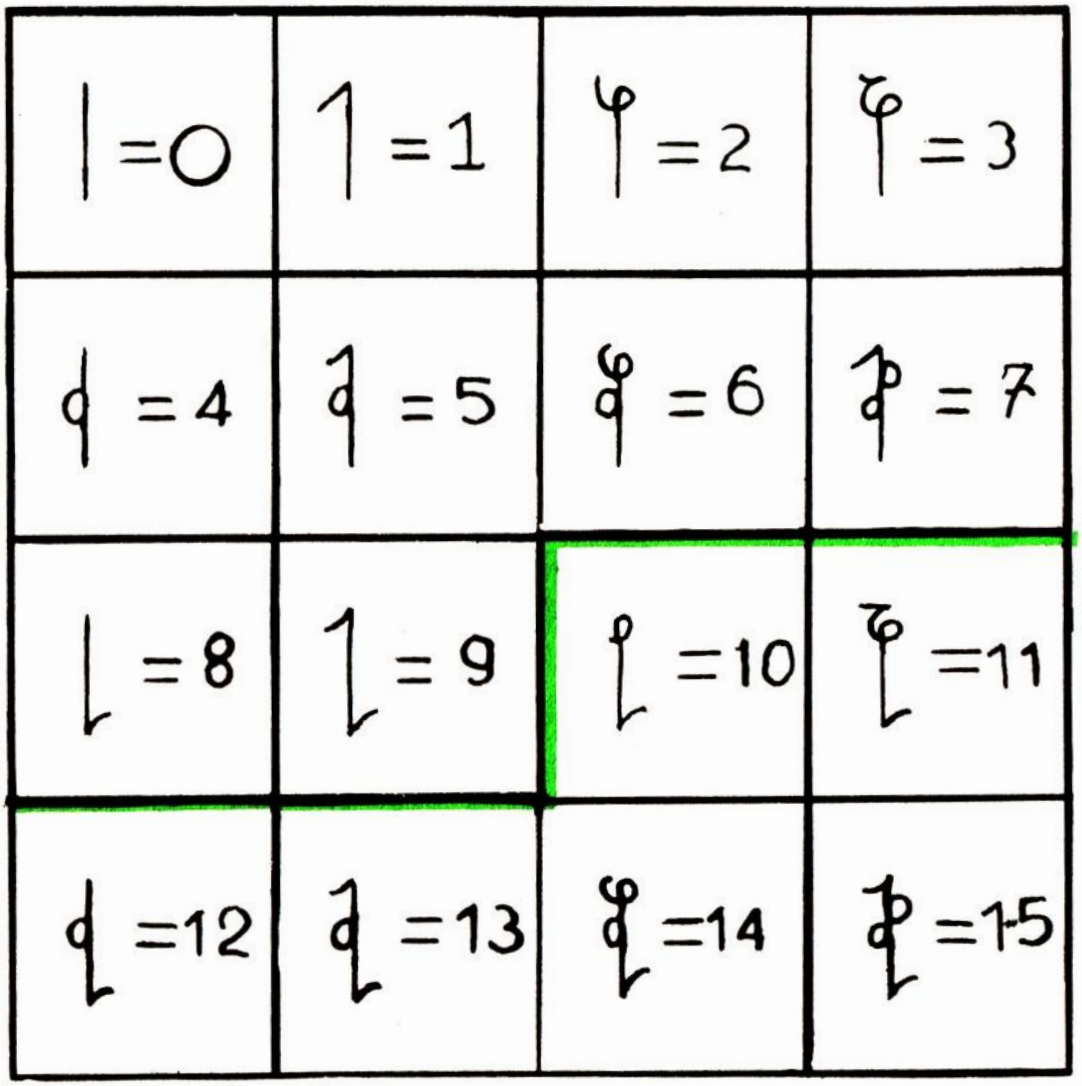
Un matemático belga, Georges Lemaître [1], propuso una escritura agradable que será quizá la del hombre del mañana:
nuestras «cifras» decimales no tienen nada que ver con el «binario»; podemos reemplazarlas por el código:

(1) Georges Lemaître: profesor de Lovaina; sacerdote y presidente de la Academia de Ciencias Pontificias. Creador (1929) de la teoría de la expansión del Universo. Murió en 1964.

Este código se escribe mal (es preciso «levantar» la mano),
se lee mal (pueden confundirse el 2 y el 4).
Mejoremos el código:



Esta vez, la escritura es cómoda y la lectura no presenta ambigüedades.
De aquí las 15 nuevas cifras:



(Por debajo de la línea verde se prolonga la escritura binaria de cifras decimales.)

por tanto, escribimos:

= 1969.

1.4

El número natural está construido y escrito. Será preciso separar las propiedades que se deducen de su escritura de las que proceden del número en sí.

Por ejemplo:

«Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 9»

es una propiedad de la numeración decimal (es decir, de la escritura); no es válida en otra escritura.

«La serie de los números primos es ilimitada»

es una propiedad de los números naturales, independiente de la forma de escribirlos.

2. Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

2.1

En el conjunto de los números naturales, la operación de restar no proporciona necesariamente un resultado.

Por ejemplo, $3 - 7$ no existe en el conjunto de los números naturales.

Formaremos un nuevo conjunto, que vamos a llamar $\mathbb{Z}$, a base de parejas extraídas de $\mathbb{N}$.

Entre estas parejas se define una relación de equivalencia:

$$(a, b) = (a', b') \text{ ssi } a + b' = a' + b.$$

La pareja (a, o) se dice que es positiva; la escribiremos a veces $(+a)$ o también a.

La pareja (o, a) se dice que es negativa; la escribiremos a veces $(-a)$ o también a.

La pareja (o, o) no es ni positiva ni negativa. La escribiremos a veces o.

2.2

La adición se define por:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

La adición posee las siguientes propiedades:

conmutativa,

asociativa,

existencia de un neutro: $(d, d) = (o, o)$

el conjunto puede ser simétrico:

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, a + b)$$
$$= (o, o)$$

El conjunto $\mathbb{Z}+$ tiene una estructura de **grupo.**

La sustracción se define por:

$$(a, b) - (a', b') = (a, b) + (b', a')$$

En este caso, la sustracción nos da una aplicación de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$.

2.3

La multiplicación se define por:

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' + bb', ab' + a'b)$$

de la que se deducen las reglas de los signos:

$+ \times + = +$	$(1, 0) \times (1, 0) = (1, 0)$
$- \times + = -$	$(0, 1) \times (1, 0) = (0, 1)$
$+ \times - = -$	$(1, 0) \times (0, 1) = (0, 1)$
$- \times - = +$	$(0, 1) \times (0, 1) = (1, 0)$

La multiplicación es:

conmutativa,
asociativa,
posee elemento neutro (1, 0)
los elementos del conjunto no admiten simétrico para $\times$
$\times$ es distributiva con respecto a $+$ y a $-$.

Se dice que $\mathbb{Z} +, \times$ tiene estructura de **anillo.**

3. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$

3.1

En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, la operación división no tiene siempre resultado.
Por ejemplo, $(-3) : (+7)$ no existe en $\mathbb{Z}$.
Formaremos un nuevo conjunto, que vamos a llamar $\mathbb{Q}$, a partir de parejas extraídas de $\mathbb{Z}$, excluyendo la pareja (0, 0).
Entre estas parejas, se define una relación de equivalencia:

$$(a, b) = (a', b') \text{ ssi } a \times b' = a' \times b.$$

3.2

La adición se define por:

$$(a, b) + (a', b') = (ab' + a'b, bb')$$

Se demuestra que es:

conmutativa,
asociativa,
posee elemento neutro (0, d),
todo elemento posee simétrico:
$(a, b) + (-a, b) = (o, b^2)$.

$Q +$ es un grupo para la adición.

3.3

La multiplicación se define por:

$$(a, b) \times (a', b') = (a \times a', b \times b').$$

Se demuestra que es:

conmutativa,
asociativa,
posee elemento neutro (d, d),
todos los elementos poseen simétrico, excepto (o, b):

$$(a, b) \times (b, a) = (a \times b, b \times a)$$
$$= (d, d).$$

$\mathbb{Q}_0 \times$ tiene estructura de grupo.

$\mathbb{Q}_0$ es una notación para representar el conjunto de los números racionales al que se le ha excluido el cero. $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

3.4

Se demuestra que:

$\times$ es distributiva con respecto a $+$.

Se dice que $\mathbb{Q}\, +, \times$ tiene estructura de **cuerpo** o **campo.**

4. Conjunto de los reales y de los complejos

Hemos construido los conjuntos:

$\mathbb{N}$ de los números naturales: 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$ de los números enteros: ..., −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, ...
$\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Faltan, pues, por construir el conjunto de los números reales (como $\sqrt{2}$, π, e, etc.) y el conjunto de los números complejos (como $3 + 2\sqrt{-1}$, etc.).

5. Otros conjuntos

Se podrían construir otros conjuntos:

conjunto de polinomios,
conjunto de fracciones algebraicas,
conjunto de matrices,
etc.

y definir operaciones en estos conjuntos para darles una estructura o varias.
Nosotros acabamos aquí; la continuación se encuentra en todos los cursos de matemáticas modernas.
Hemos querido demostrar la posibilidad de construir estructuras numéricas de las que utilizamos corrientemente.
Si este patrimonio cultural no lo asimiláis rigurosamente, no os extrañéis de vuestros infortunios matemáticos.

8

LAS ESTRUCTURAS DEL ESPACIO GEOMETRICO

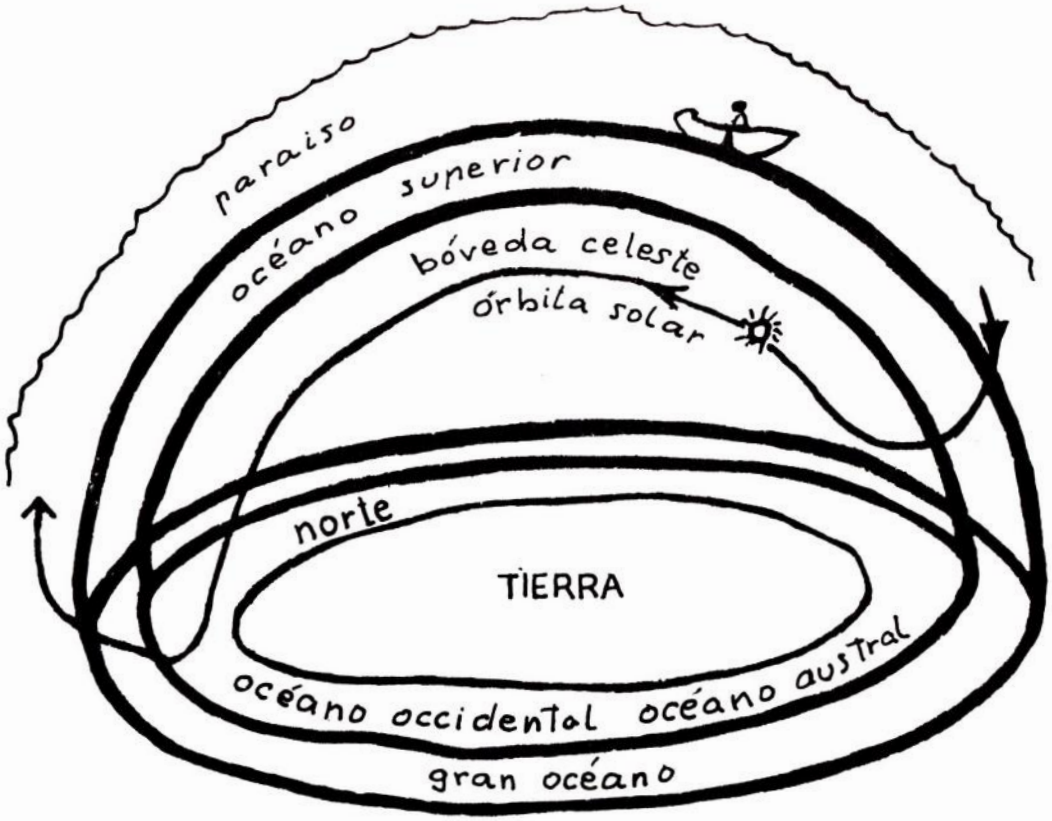
Nadie entre aquí si no es geómetra.
Platón.

1. Los instrumentos divinos

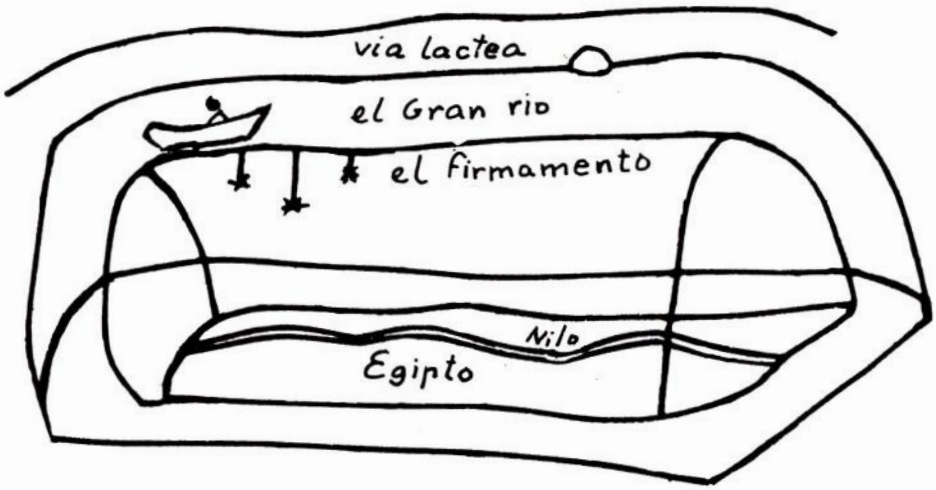
1.1

Los pueblos de Sumeria habitaban una llanura cuyo horizonte se extendía por igual en todas las direcciones. Por consiguiente, concibieron el universo como una semiesfera.
En cuanto a los astros, eran los barcos de los dioses. El capricho divino explicaba las irregularidades de las trayectorias. Pero los astros, siendo dioses, influían en el hombre. La astrología estaba, pues, estrechamente relacionada con la astronomía concebida como magia (1).

(1) Casi nos atreveríamos a decir que, para estos pueblos, la astrología era racional. Deja de serlo en el momento en que los astros ya no son dioses, es decir, en el libro del Génesis o entre los filósofos griegos.

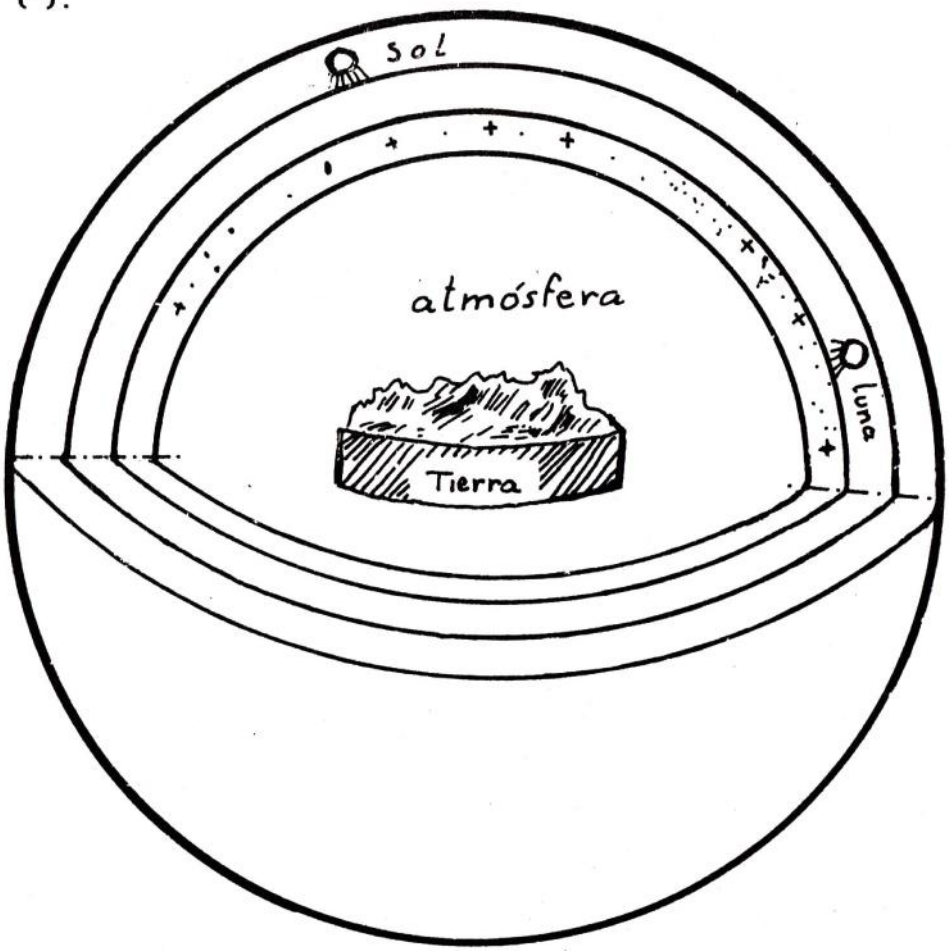


Los egipcios vivían en un país alargado, estirado por el curso del Nilo. Toda la vida social y económica se localizaba en una faja de tierra. Su universo era, pues, un cofre alargado. La bóveda celeste era una mujer (o una vaca) que se tragaba al sol en el ocaso para engendrarlo al amanecer. El sarcófago situaba al muerto entre el cielo y la tierra. Los filósofos griegos (1) racionalizaron el cielo expulsando a los dio-



(1) Al principio, esta racionalización se originó en la escuela ioniana (Anaxágoras: hacia 611-545).

ses. El movimiento de los astros debía explicarse mecánicamente. Por la regularidad de su movimiento, concibieron el universo como una esfera, en el centro de la cual flotaba la tierra. Al principio se imaginó la tierra como un cilindro. Más tarde, a medida que se fue explorando su superficie se cambió la concepción que quedó imaginada como esférica [1].



1.2

Para los griegos, la circunferencia y la esfera eran, pues, la curva y la superficie privilegiadas.
Siendo el compás su instrumento de trabajo, fue proclamado divino. Más tarde se consintió en agregar la regla.
El creador, demiurgo, era arquitecto, es decir, geómetra. La ciencia del hombre debía reconocer la arquitectura divina. Toda la geometría debía desde entonces construirse con la regla y el compás [2].

---

(1) Eudoxio: hacia 408-355.

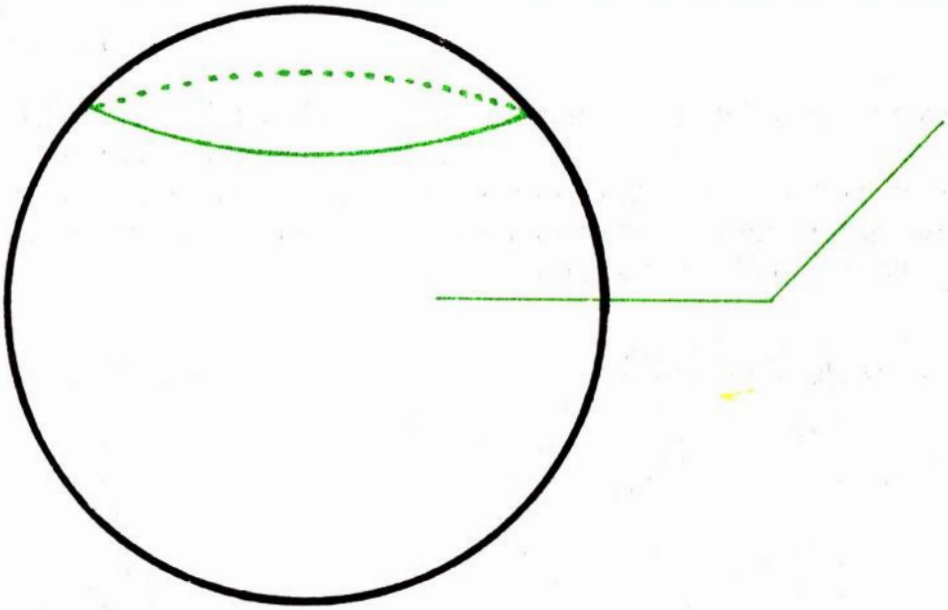
(2) V. Platón: Timeo, 33.
«Figuradamente, él (Dios) le ha dado (al Universo) lo que le conviene y le es connatural; según esto, al viviente que debe envolver en sí todos los vivientes, lo que puede convenirle como figura, es lo que comprende en sí todo lo que tiene de figuras; estas propiedades también las posee en forma de esfera, cuyo centro equidistante de todos los puntos superficiales que la redondean, trabajan a su alrededor: por lo que es de todas las figuras la más perfecta y la más parecida a sí misma; porque juzga que hay mil veces más belleza en lo parecido que en lo diferente.»

El Gran Arquitecto del Universo: trabaja con el compás.

Las limitaciones que se impone el hombre son a la vez fecundas y dogmáticas: fecundas porque proporcionan una primera tentativa de clasificación; dogmáticas porque paralizan la imaginación creativa.
Encerrar la geometría en el empleo exclusivo de la regla y del compás es tan absurdo como pretender construir una nave interplanetaria con un martillo y un destornillador como únicas herramientos. Los griegos desembocaron, además, en un escándalo y se encerraron en un callejón sin salida.

1.3

El escándalo fue provocado por Apolonio ([1]).
Para Euclides (y Platón), los tres cuerpos ideales de la geometría en el espacio eran los tres cuerpos redondos: esfera, cilindro y cono de revolución.
Pero si las secciones planas en la esfera no daban más que circunferencias o curvas perfectas, no ocurría lo mismo con el cilindro o el cono.
Las secciones planas en el cilindro pueden, en efecto, dar circunferencias, pero también «elipses» o «dos rectas paralelas». Las secciones planas en el cono pueden dar circunferencias, pero también «elipses», «parábolas», ramas de «hipérbola» e incluso «dos rectas secantes».

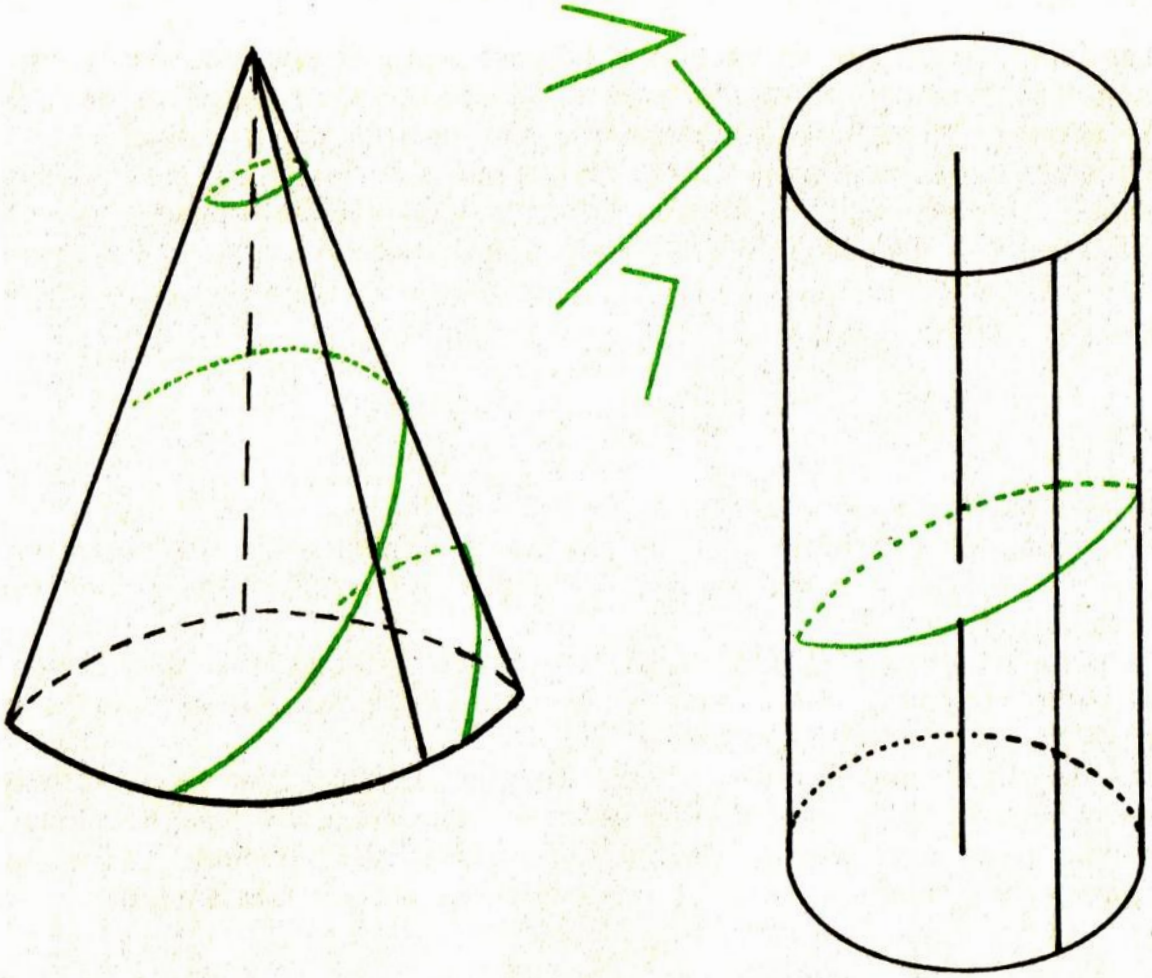


Apolonio fue el primero en empezar el estudio de estas curvas impuras que llamó **secciones cónicas.** Comprobó que proporcionaban «alguna cosa» más general que la circunferencia. No supo jamás que los planetas seguían, como trayectorias, sus cónicas heréticas y no las circunferencias ortodoxas. (Fue Kepler quien lo demostró.) ([2])

---

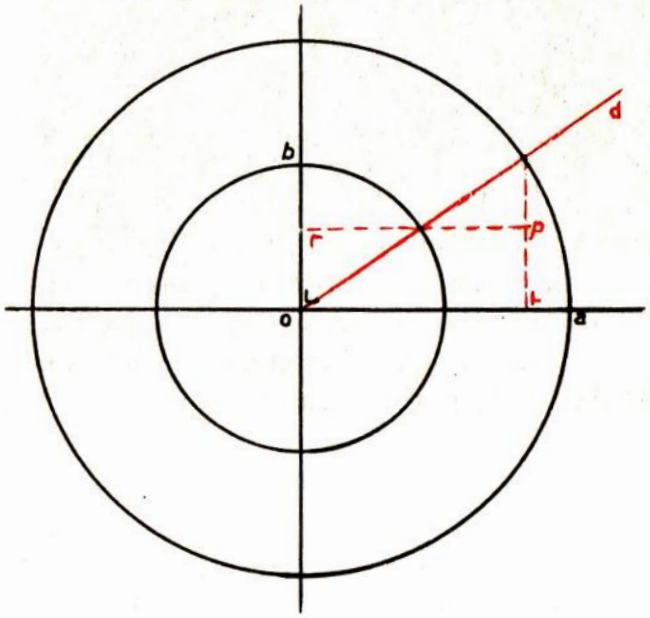
(1) Apolonio de Pérgamo (3 s. a. J.C.).

(2) Kepler (1571-1630).

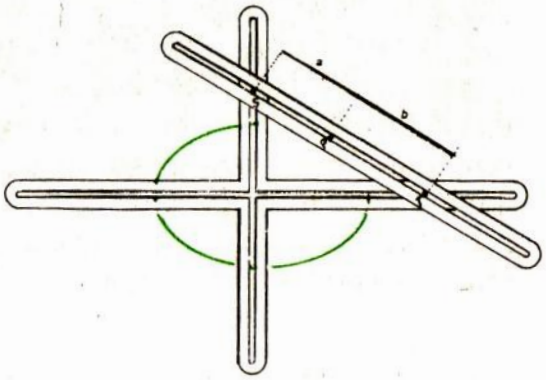


No obstante, teniendo en cuenta el parentesco de la circunferencia y de las cónicas, la mayor parte de las construcciones requeridas para las cónicas podían efectuarse con la regla y el compás. Se consideró, pues, que estas cónicas escandalosas proporcionarían un libro suplementario al evangelio euclidiano.

Con la regla y el compás.



Con el elipsógrafo.



Aún hoy se aprende, sin reír, a construir las cónicas «por puntos» con la regla y el compás, y se ignora soberbiamente la existencia de los elipsógrafos.

En el primer caso:
Si construyeseis mil rectas d obtendríais mil puntos p que os permitirían trazar una elipse.

En el segundo caso:
Si S y T recorren las dos rectas perpendiculares, p recorre directamente la elipse.

1.4

El muro del callejón sin salida bloqueó a los geómetras que se atascaron en los tres problemas de la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo.

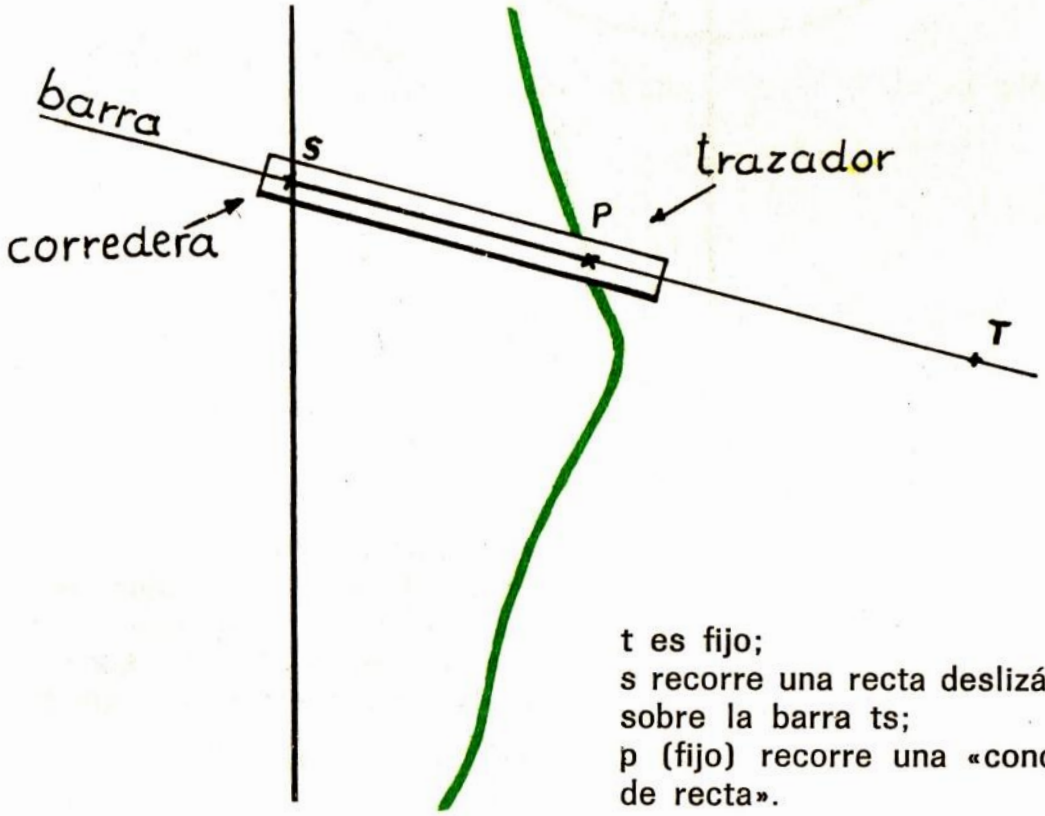
1.4.1

La trisección del ángulo
Se trata de dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales.
Esto exige la resolución de la ecuación de tercer grado:

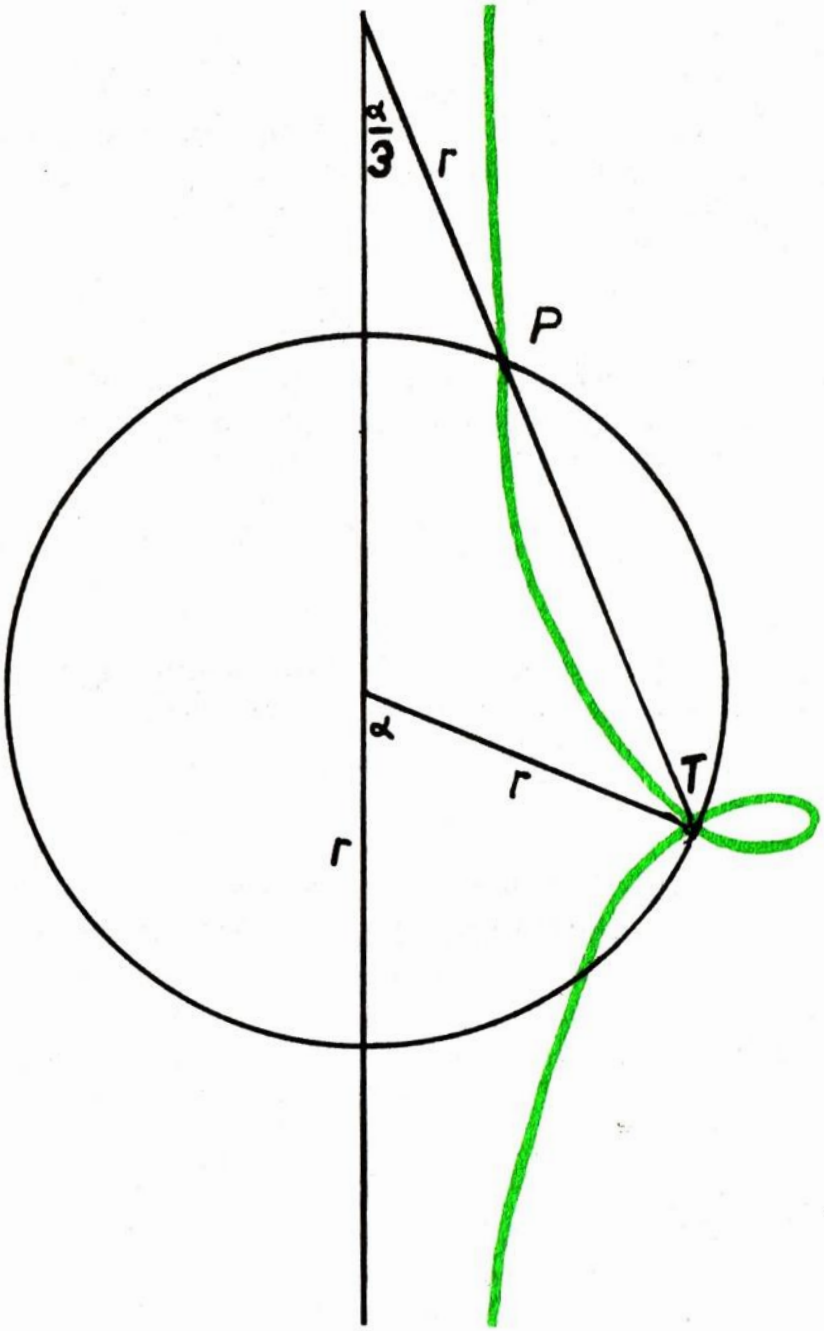
$$4x^3 - 3x + a = o \qquad \text{con } a = \text{sen } \alpha$$

$$x = \text{sen } \frac{\alpha}{3}$$

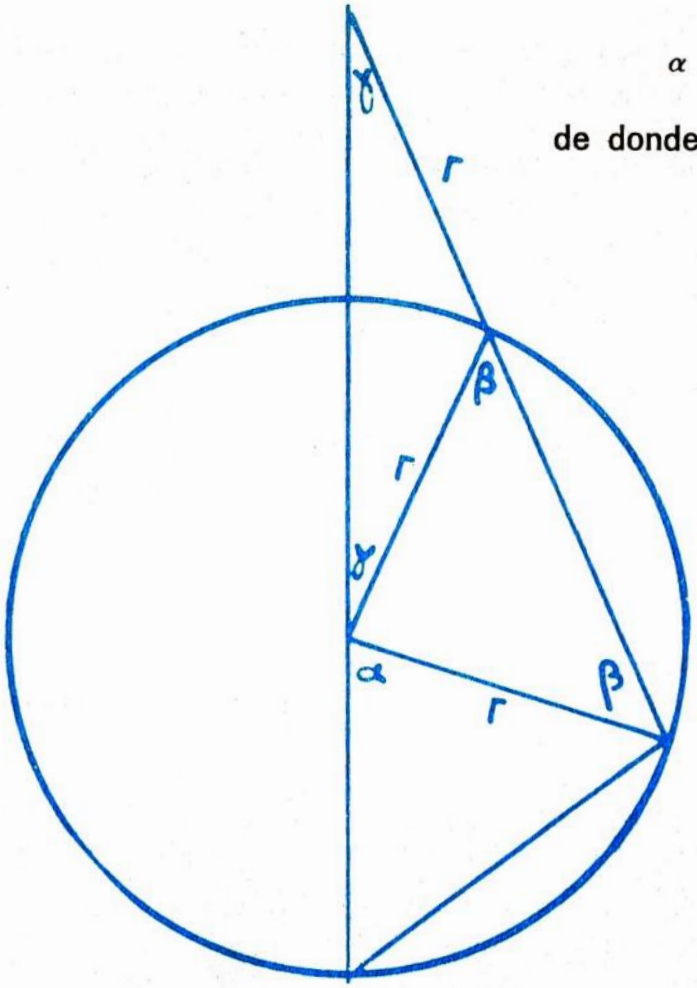
El problema no puede resolverse, pues, con regla y compás; pero, por el contrario, podría hacerse con un trazador de curvas de tercer grado:



t es fijo;
s recorre una recta deslizándose sobre la barra ts;
p (fijo) recorre una «concoidea de recta».



α: ángulo central;
se construye la concoidea para el punto t y el segmento r; la intersección de la concoidea y de la circunferencia nos da P, y $\frac{\alpha}{3}$ a partir de P.



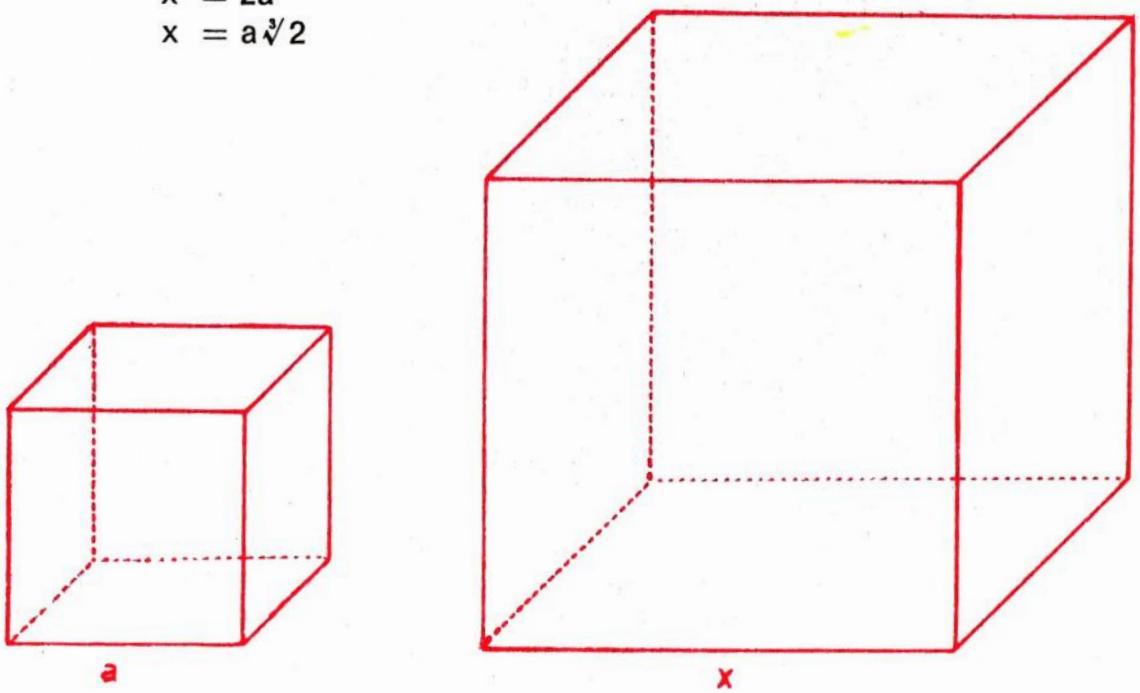
$$\alpha + \gamma = 2\beta$$
$$\beta = 2\gamma$$
de donde $\alpha = 3\gamma$
$$\gamma = \frac{\alpha}{3}$$

1.4.2

La duplicación del cubo

Se trata de construir un cubo de volumen doble al de un cubo dado:

$$x^3 = 2a^3$$
$$x = a\sqrt[3]{2}$$

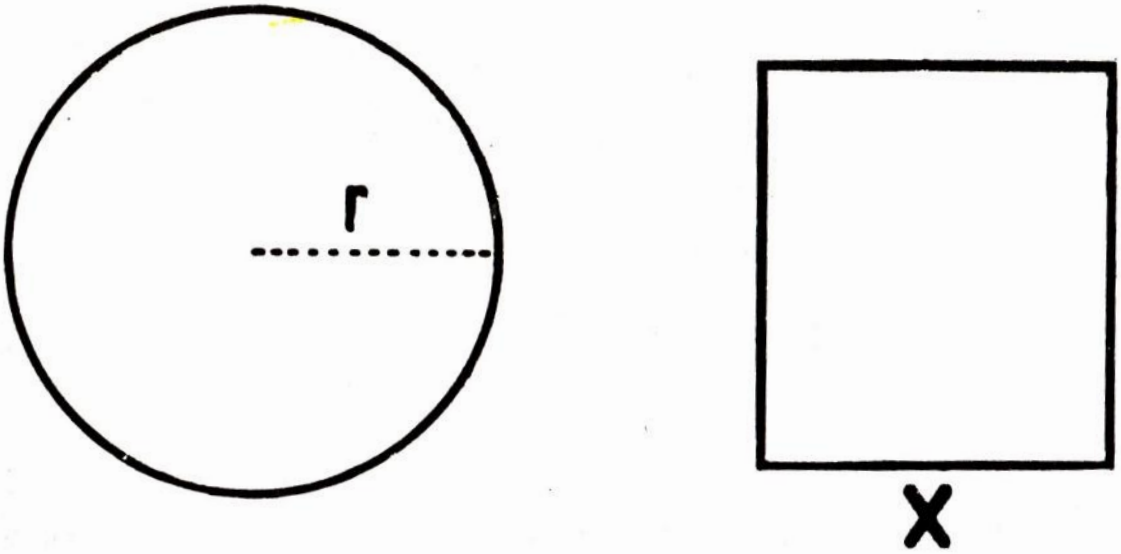


• Como el compás no traza más que curvas particulares de segundo grado, no hay manera de construir rigurosamente «$a\sqrt[3]{2}$» con la regla y el compás.
De nuevo esta vez, un trazador de curvas de tercer grado resolvería la cuestión.

1.4.3

La cuadratura del círculo

Se trata de construir un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado:



$$x^2 = \pi r^2$$
$$x = r\sqrt[2]{\pi}$$

π es un número «transcendente», es decir, que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Esto hace imposible la resolución rigurosa de la cuadratura del círculo con la regla y el compás.

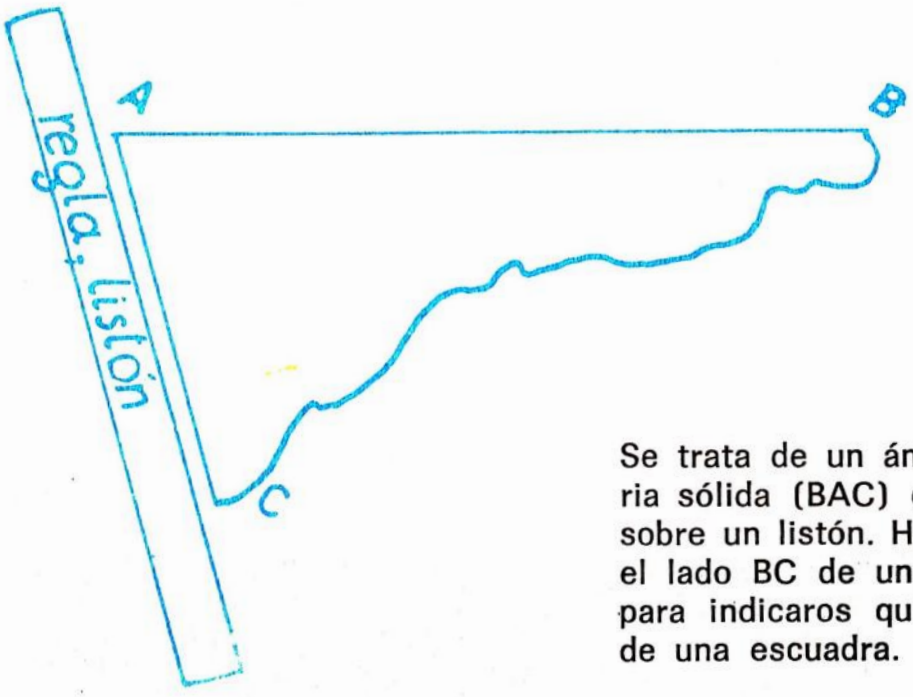
1.5

Durante siglos, los geómetras perdieron su tiempo intentando resolver problemas irresolubles. Y como nadie se preocupaba en buscar «el porqué», no había modo de efectuar estas construcciones. Tuvieron que admitir el fracaso de los instrumentos divinos y limitar al creador. Fue preciso esperar al siglo XVII con su geometría analítica, y al XIX con su teoría de los números transcendentes para persuadirse de que

había sido vano obstinarse, y que, después de todo, más valía cambiar de instrumentos.
En la historia, y todavía hoy, estos problemas han fascinado a los esquizofrénicos de la geometría. Además, con el mismo tratamiento que el «movimiento perpetuo» por los físicos paranoicos.
Con frecuencia, estos chapuceros de lo irracional descubren soluciones ilusorias que les conducen a la convicción del aislamiento por la incomprensión del mundo sabio. Esta locura es la última consecuencia de la utilización platónica de los instrumentos divinos.

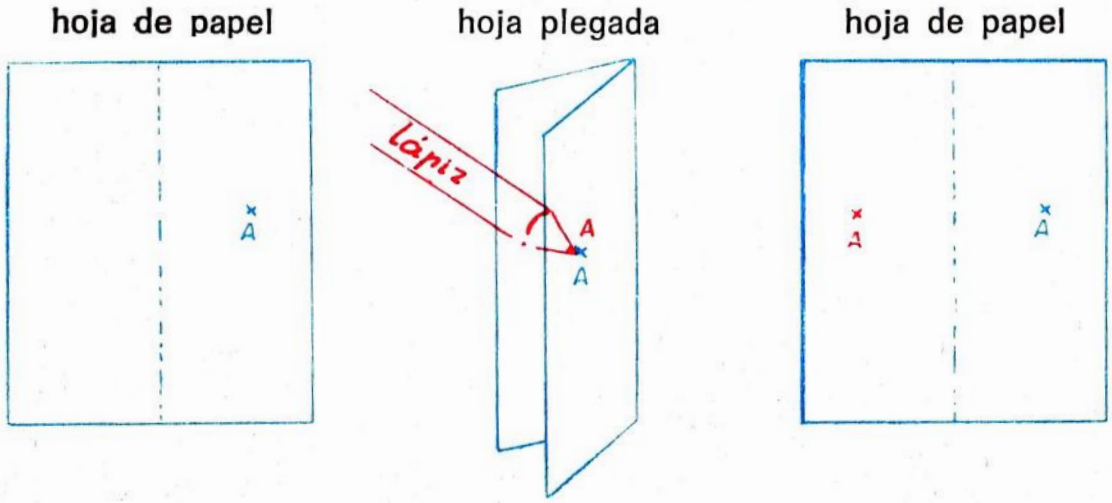
¿La distancia de la tierra a la luna se mide con el compás o con el láser?

Los instrumentos de la geometría son innumerables.
El matemático «moderno» añadirá algunos. Para limitarse a la geometría elemental, utilizará el «trasladador» y el «plegador».
Veamos un «trasladador»:



Se trata de un ángulo en materia sólida (BAC) que se desliza sobre un listón. Hemos dibujado el lado BC de una manera rara para indicaros que no se trata de una escuadra.

Veamos las fases del empleo de un «plegador»:



Esto escandalizó a los integristas: ¡considerar el plegado como una operación instrumental! Esperamos que se nos enseñe lo que no es «instrumental» en el plegado. Y, sobre todo, por qué esto sería menos «noble» que el empleo del compás...
Desde luego, no hay ninguna razón para no utilizar el compás o la regla.

1.7

Evidentemente, no podemos plantear aquí una estructuración completa de la geometría según la matemática de hoy. Nos limitaremos, por consiguiente, al uso de ciertos instrumentos.
Expondremos primero la construcción de una geometría correspondiente al empleo del trasladador. Será la geometría **afín.**
Generalizaremos esta geometría afín por el empleo exclusivo de la regla. Será la geometría **proyectiva.**
Particularizaremos esta geometría afín por el uso del «plegado» o del «compás». Tendremos así la geometría **euclidiana.**
Entre estas tres geometrías, podríamos intercalar otras de intermediarias.
En una primera exposición evitaremos este tipo de refinamiento que nos llevaría a la redacción de un nuevo volumen.
Podríamos particularizar o generalizar todavía más los conceptos geométricos. El encaje de las geometrías podría, pues, ser prolongado tanto en el sentido de la concretización como en el sentido de la abstracción. Nos abstendremos de ello por las mismas razones.

Nuestro esquema

generalización ↑

posibilidades de generalización:
topología,
geometría algebraica,
etc.

Geometría proyectiva

posibilidades de insertar: geometría homográfica,
etc.

Geometría afín

posibilidades de insertar: geometrías de Riemann.

Geometría euclidiana

posibilidades de particularizar:
semejanzas directas,
etc.
geometría métrica.

↓ particularización

La geometría afín proporciona un excelente camino para acometer la geometría general: ni demasiado abstracta ni demasiado particular. A partir de ella, el alumno podrá evolucionar más cómodamente en los dos sentidos.

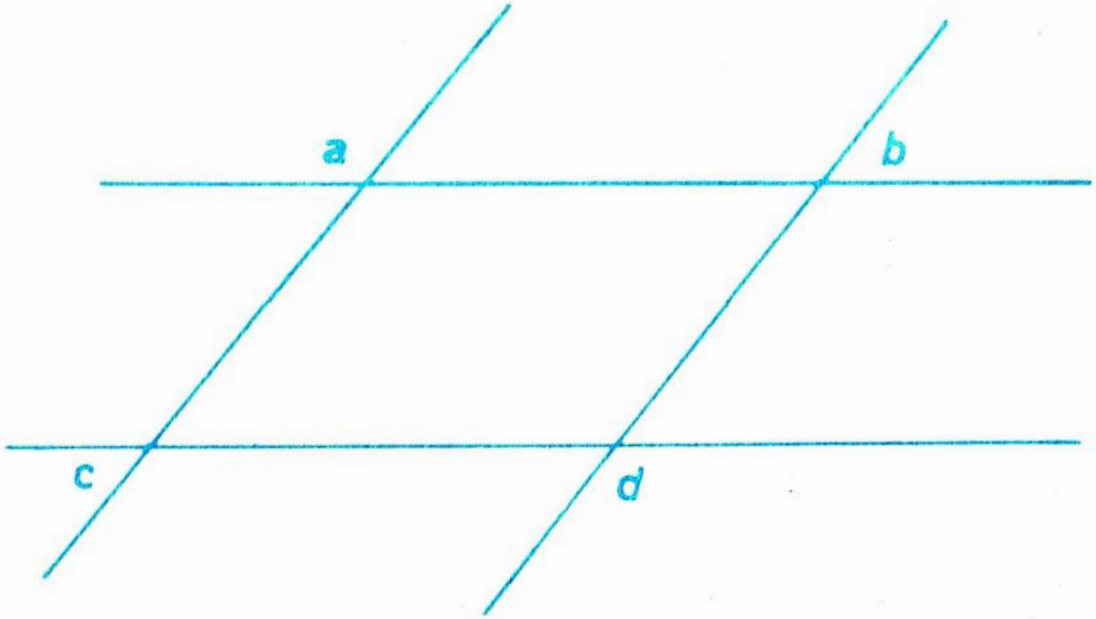
2. La geometría del trasladador (geometría afín)

2.1

El empleo del trasladador [1] supone un cierto número de axiomas relativos al punto, a la recta y a la relación de paralelismo entre rectas. Estos axiomas proporcionan el primer acceso a la geometría afín. Los trataremos muy por encima.

2.2

El trasladador permite construir paralelogramos y, a partir de esto, vectores que llamaremos **equipolentes.**



Se escribe: $(ab) \uparrow (cd)$ de donde se deduce $(ac) \uparrow (bd)$

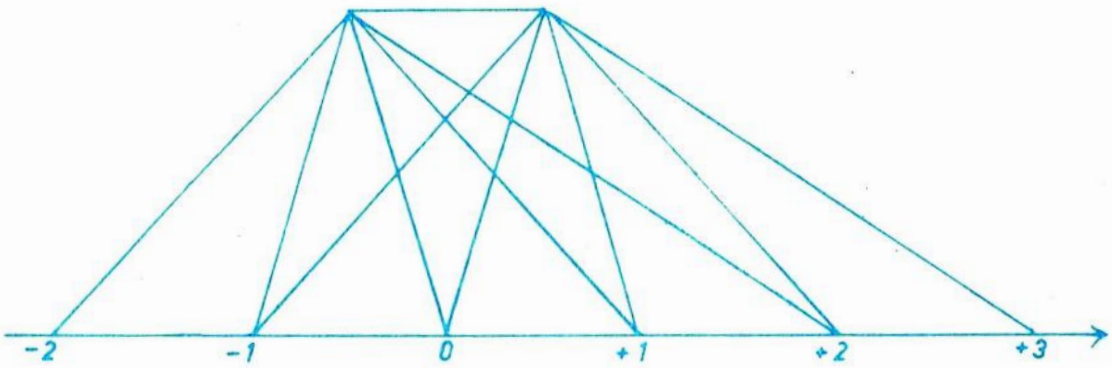
La equipolencia es reflexiva, simétrica y transitiva.

---

(1) El «trasladador» descrito (1.6) no proporciona más que el paralelismo. El geómetra se empeña en no utilizar el ángulo deslizante.

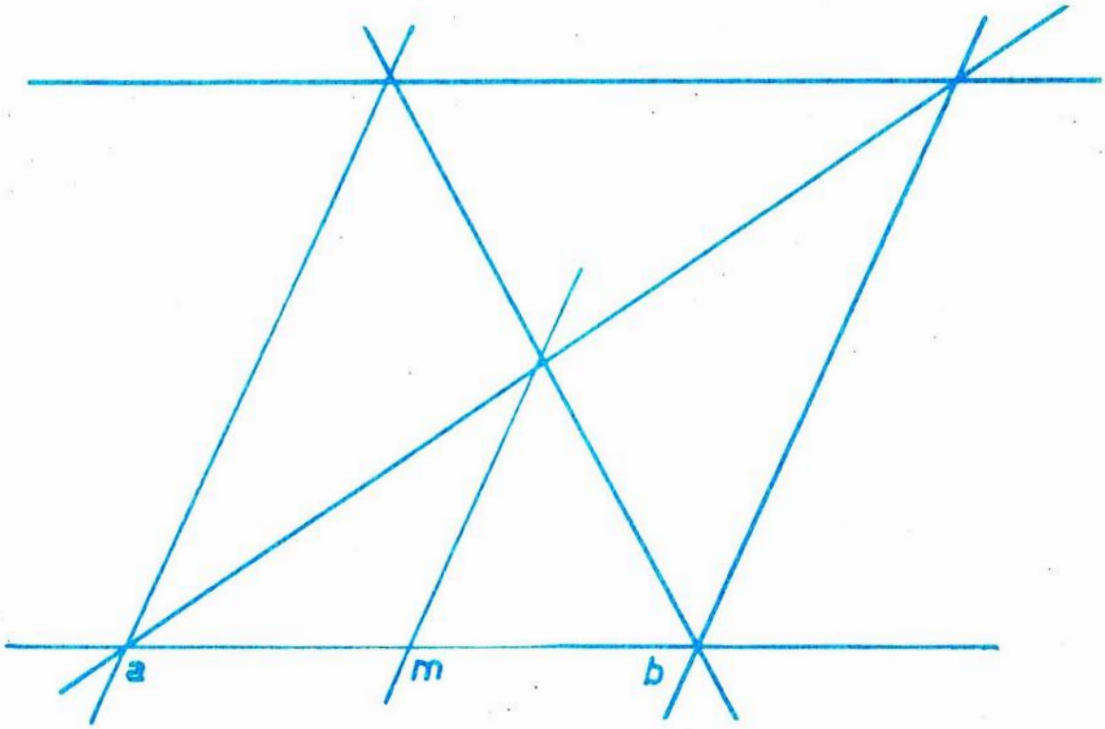
2.3

El trasladador permite graduar una recta con números enteros; los puntos de la recta estarán relacionados por una relación de orden.



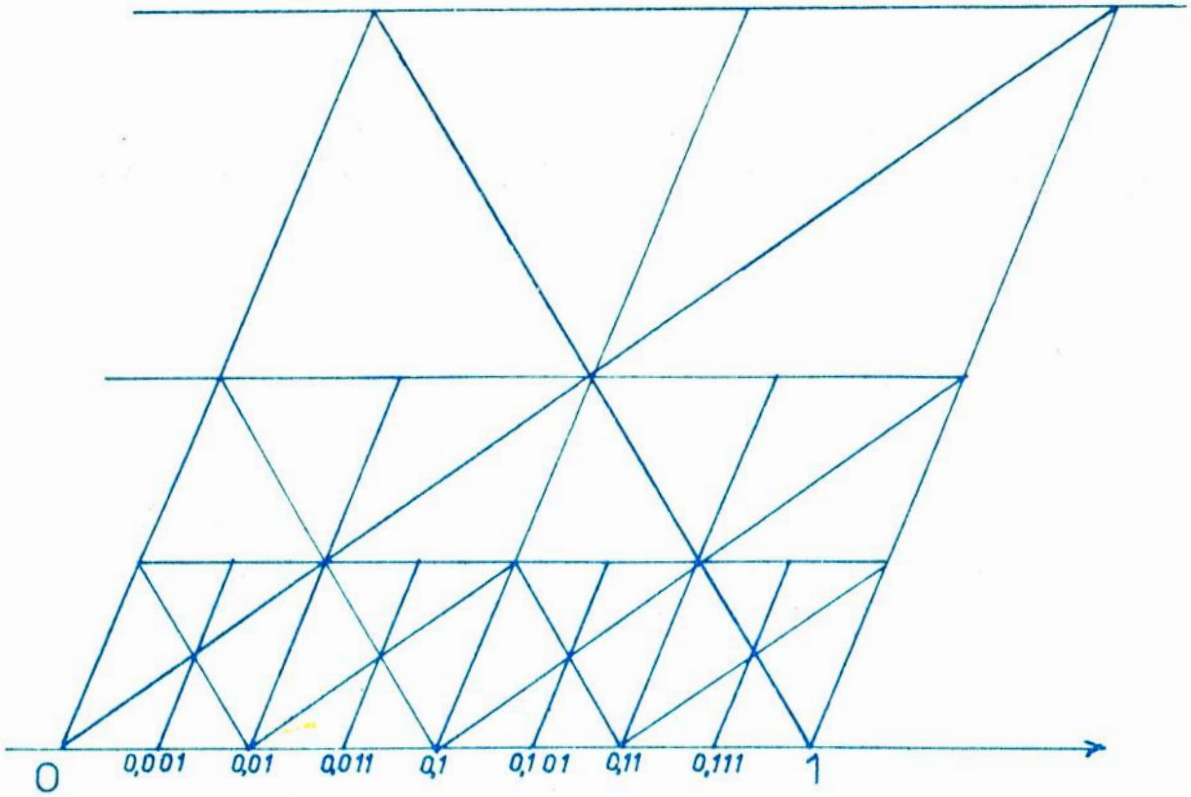
2.4

El trasladador nos proporciona el punto medio de un segmento cualquiera.

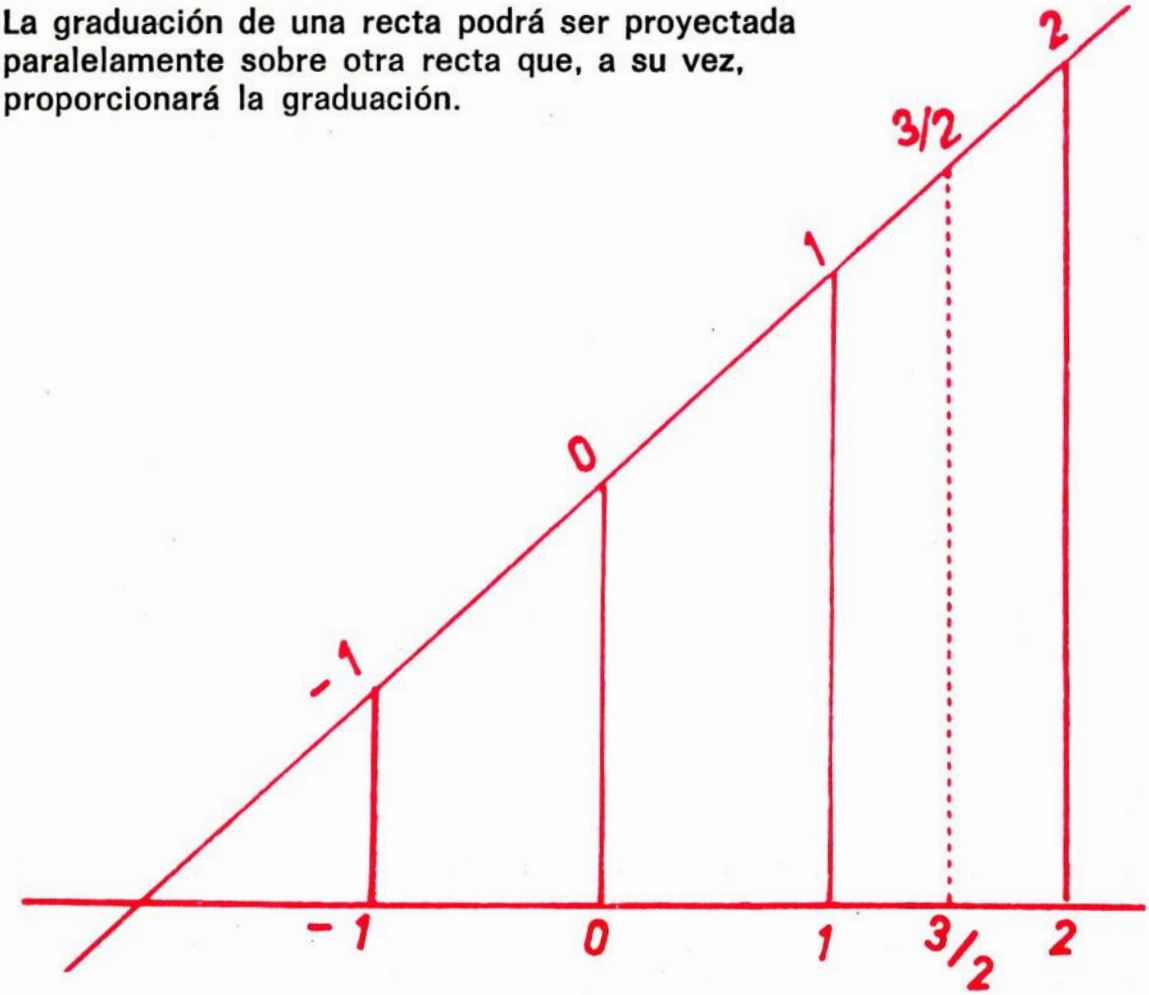


2.5

La escala de graduación de una recta podrá ser dividida tan finamente como deseemos.
Todo punto de una recta graduada podrá ser asociado biyeotivamente con un número real (esto es un axioma).



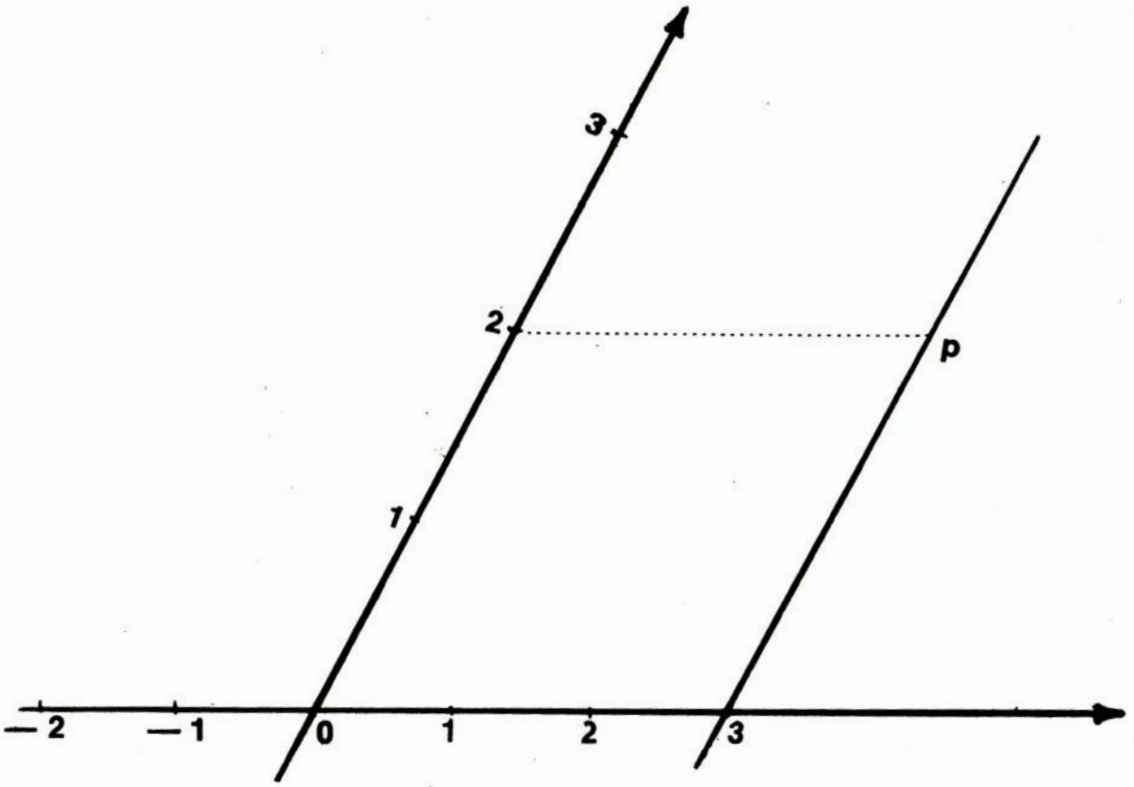
La graduación de una recta podrá ser proyectada paralelamente sobre otra recta que, a su vez, proporcionará la graduación.



Es una nueva formulación para el teorema de Tales [1].

2.7

Todo punto del plano podrá señalarse por proyecciones paralelas sobre dos rectas graduadas no paralelas.



Los puntos de un plano están, pues, asociados biyectivamente con las parejas del producto cartesiano:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

($\mathbb{R}$ = conjunto de los números reales).

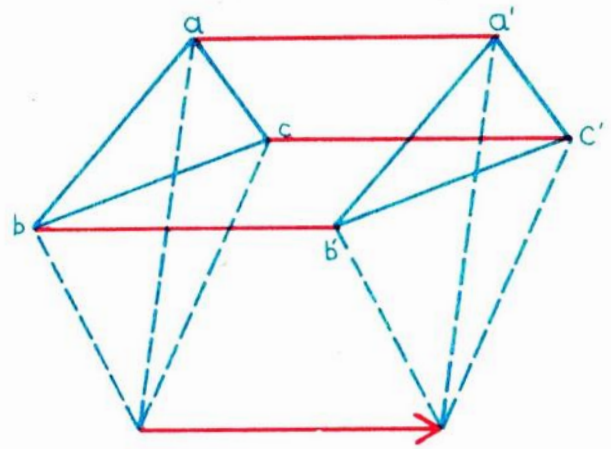
Esto coincide con la asociación tradicional de las coordenadas cartesianas con los puntos del plano.
Este plano será llamado **señalado** en relación con las dos rectas graduadas.
Diremos que tiene **dos** dimensiones.
La asociación de puntos con $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nos llevaría a la geometría de **tres** dimensiones.

(1) Tales de Mileto: hacia 639-545 a. J.C.

2.8

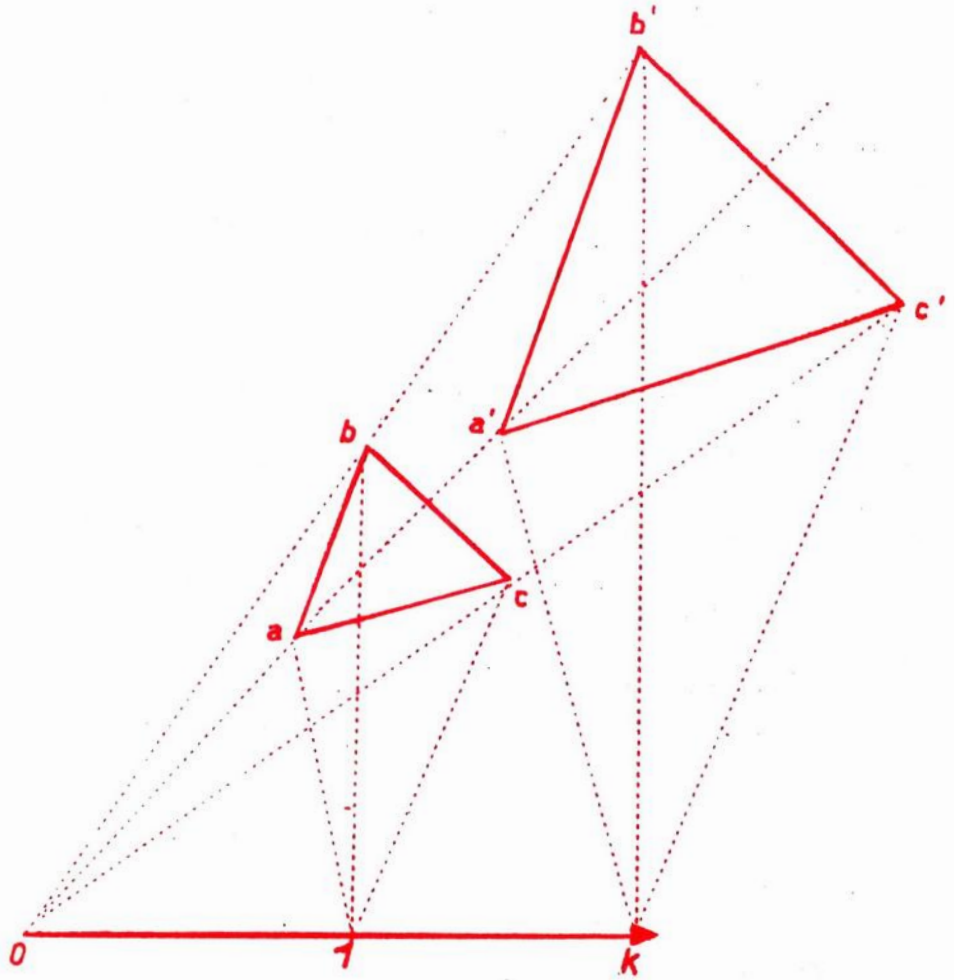
El trasladador permite transformar el plano por **traslación.**
Una traslación es una aplicación biyectiva de π en π, o también de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Asociando un punto p a una pareja de números reales,

$p \rightarrow p'$
$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$.



2.9

El trasladador permite transformar el plano por **homotecia.**



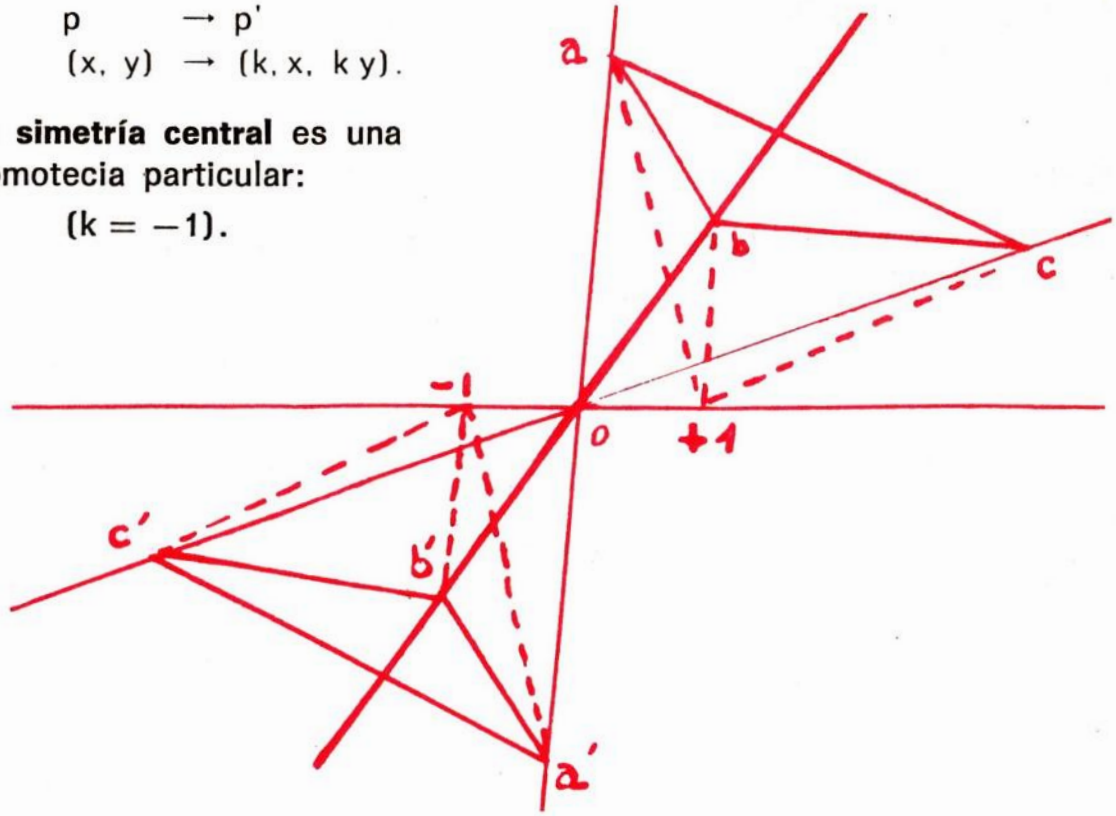
Una homotecia es una aplicación biyectiva de π en π o también de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **en** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Asociando un punto p á una pareja de números reales:

$$p \rightarrow p'$$
$$(x, y) \rightarrow (k.x, k.y).$$

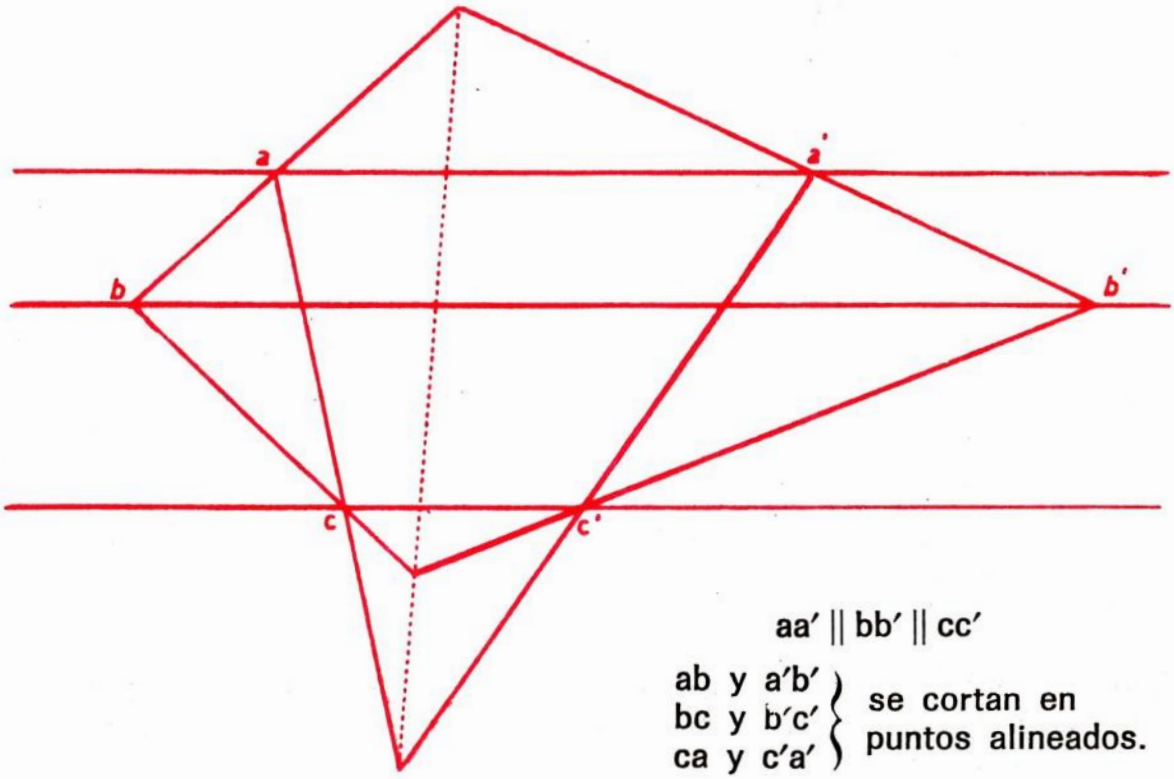
La **simetría central** es una homotecia particular:

$(k = -1)$.



2.10

El trasladador permite transformar el plano por **homología paralela.**



$aa' \parallel bb' \parallel cc'$

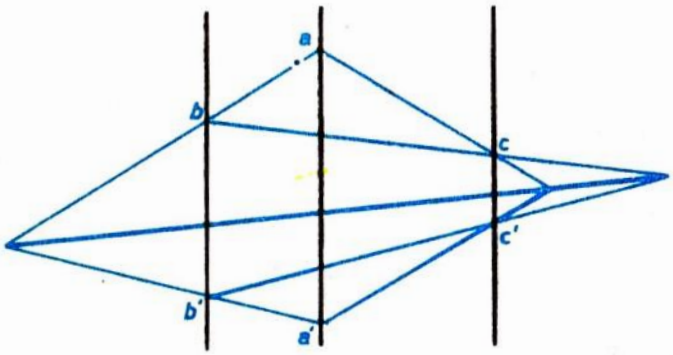
$\left.\begin{array}{l} ab \text{ y } a'b' \\ bc \text{ y } b'c' \\ ca \text{ y } c'a' \end{array}\right\}$ se cortan en puntos alineados.

Una homología paralela es una aplicación biyectiva de π en π o también de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Asociando un punto p con una pareja de números reales:

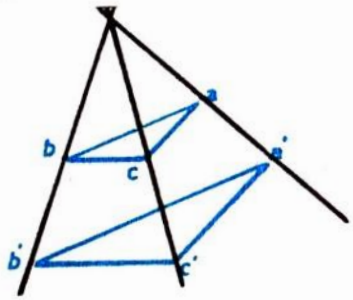
$$\begin{aligned} p &\rightarrow p \\ (x, y) &\rightarrow (k\,x, y). \end{aligned}$$

2.11

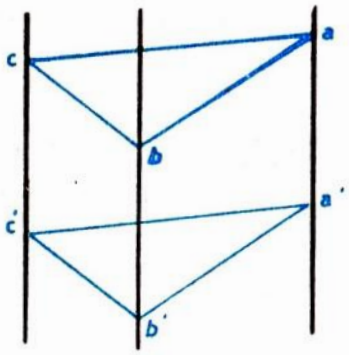
Las tres transformaciones descritas presentan propiedades correlativas interesantes:



Homologías paralelas
aa', bb', cc' son paralelas.
ab y a'b', ac y a'c', bc y b'c' se cortan en puntos alineados.



Homotecias
aa', bb', cc' son concurrentes.
ab y a'b', ac y a'c' son paralelas.



Traslaciones
aa', bb', cc' son paralelas.
ab y a'b', bc y b'c', ca y c'a' son paralelas.

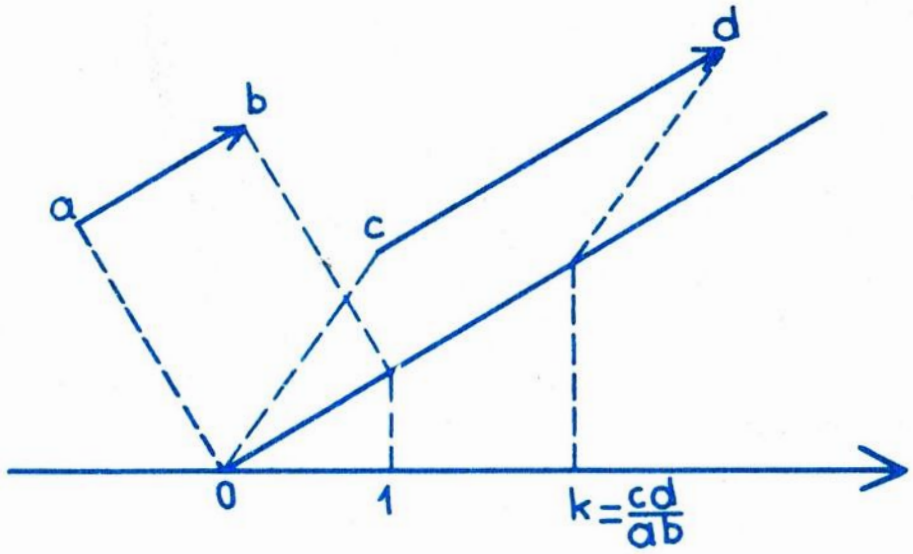
2.12

Una **afinidad** es una composición de **traslaciones** y de **homologías paralelas.** El trasladador permite transformar el plano por **afinidades.**
Se deduce que:

la afinidad es la transformación más general que se puede efectuar con un trasladador;
las afinidades forman un grupo de transformaciones;
las traslaciones forman un grupo de transformaciones.

2.13

El trasladador permite definir el producto de dos vectores paralelos.



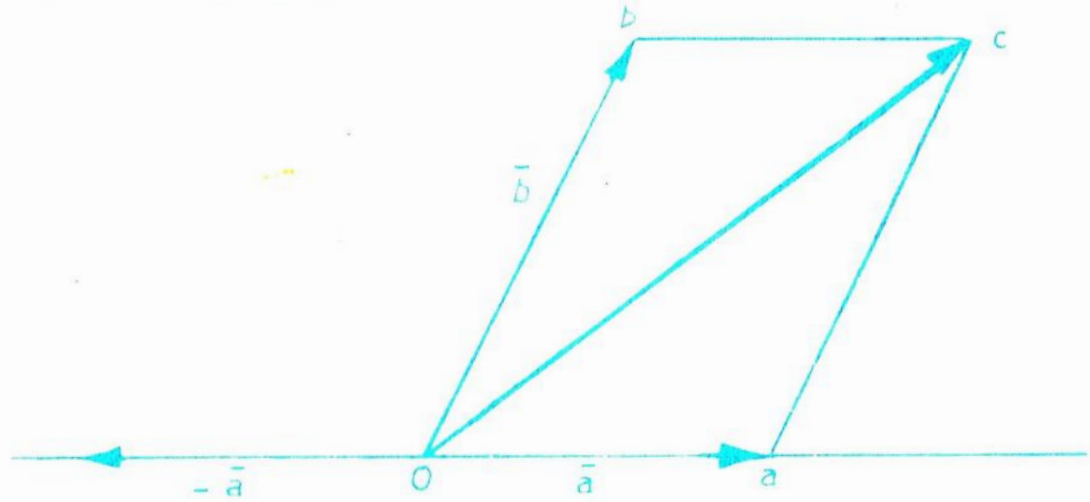
Se podrá, por lo tanto, hablar en la geometría del trasladador:
de segmentos paralelos de longitudes iguales o desiguales;
de razón de segmentos;
de punto medio;
e, incluso, de «paralelismo».

La geometría **afín** (del trasladador) parte de los conceptos de punto, recta y paralelismo.
Comprende las transformaciones del plano por traslaciones, homotecias y homologías paralelas (afinidades).
Da significado a los conceptos de paralelismo, producto de sección, punto medio, medianas, proyecciones paralelas, comparación de vectores paralelos; estos conceptos se **conservan** en las transformaciones del plano.
Los conceptos de medida de un ángulo, de perpendicularidad, de producto de vectores no paralelos, etc., no tienen aquí ningún significado. No se pueden construir y no se conservan en las transformaciones del plano.

3. El espacio vectorial

3.1

El plano, tal como lo hemos considerado, es la imagen de una estructura algebraica fundamental: la estructura de **espacio vectorial.**
Se da un conjunto $\mathbb{V}$ a cuyos elementos se les llama vectores y que escribimos $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.
Por ejemplo, fijado un punto o del plano, $\bar{a}$ será el vector (o, a), $\bar{b}$ será el vector (o, b), etc.



3.2

En el conjunto $\mathbb{V}$ definimos una relación de equivalencia (que aquí llamamos de equipolencia) (bc) $\uparrow$ (oa).

3.3

Damos al conjunto $\mathbb{V}$ una ley de composición interna (que escribimos $+$) que proporciona una estructura de grupo.
Aquí, se trata de la adición de vectores:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}.$$

Se tiene estructura de grupo ya que:

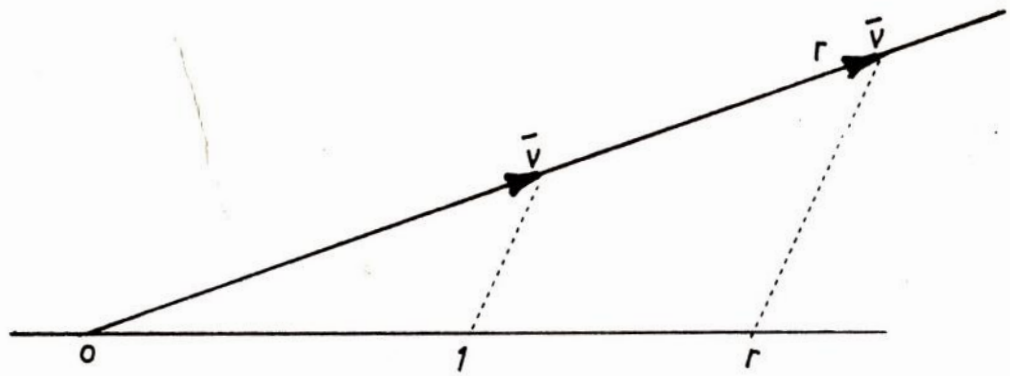
$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (conmutatividad).
$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (asociatividad).
$\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$ (existencia de elemento neutro).
$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$ (todo elemento tiene simétrico).

3.4

Consideremos el conjunto (cuerpo) de los números reales $\mathbb{R}$.
En el cuerpo de los reales se definen dos operaciones internas: $+$ y $\times$ (que corresponden a la adición y multiplicación de los reales).

3.5

Se define una operación externa aplicando $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$.
Es decir, que a toda pareja $(r, \bar{v})$ constituida por un número real y un vector, se le asocia un nuevo vector $\bar{v}'$.
Se representa la operación por $r \cdot \bar{v}$.
Esta operación será, en nuestra estructuración del plano afín, una homotecia de centro o y producto r.



Esta operación externa viene definida por los axiomas siguientes:

$o\ \bar{v} = \bar{o}$ donde $o \in \mathbb{R}$, $\bar{o} \in \mathbb{V}$

$1\ \bar{v} = \bar{v}$ donde $1 \in \mathbb{R}$

1 es neutro para la operación externa:

$r\ \bar{o} = \bar{o}$ donde $\bar{o} \in \mathbb{V}$

o es absorbente para la operación externa:

$$r' \cdot (r \cdot \bar{v}) = (r' x r) \cdot \bar{v}.$$

La operación externa es asociativa; esta propiedad permitirá utilizar el mismo signo para la multiplicación de dos números reales y para la operación externa:

$$r' \cdot (r \cdot \bar{v}) = (r' \cdot r) \cdot \bar{v} = r' \cdot r \cdot \bar{v}$$
$$r \cdot (\bar{v} + \bar{v}') = r \cdot \bar{v} + r \cdot \bar{v}'.$$

La operación externa es distributiva con respecto a la operación interna:

$$(r + r') \cdot \bar{v} = r \cdot \bar{v} + r' \cdot \bar{v}.$$

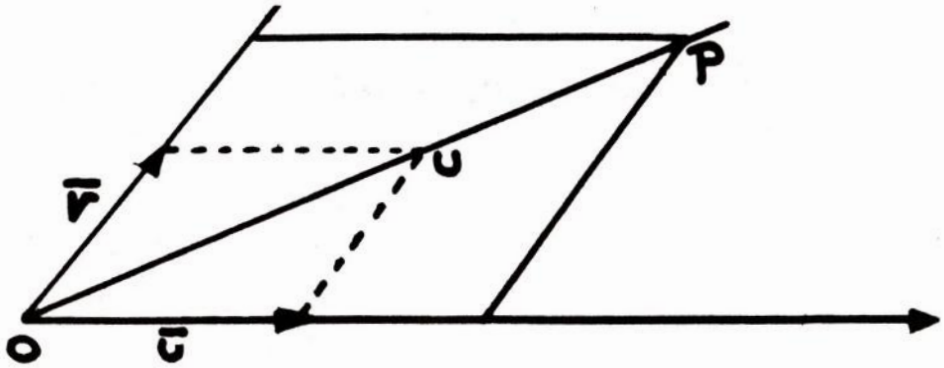
Esta propiedad permitirá usar el mismo signo para la adición de dos números reales y para la operación interna:

$$(r + r') \cdot \bar{v} = r \cdot \bar{v} + r' \cdot \bar{v}$$

$+$ es distributiva con respecto a $\cdot$ (operación externa).

3.6

Representaremos al plano por dos vectores no paralelos que se cortan en o y que se llaman vectores unidad.



$$(op) = x \cdot \bar{u} + y \cdot \bar{u}.$$

Se podrá asociar al punto p la pareja de números reales (x, y).
Las transformaciones del plano corresponden a determinados tipos de transformación con las parejas (x, y). Habrá isomorfismo entre la estructura del plano para un grupo de transformaciones y el espacio vectorial correspondiente.

3.7

El espacio vectorial es la estructura base de la geometría llamada «analítica». Verifica la afirmación temeraria y un poco oscura de los pitagóricos:

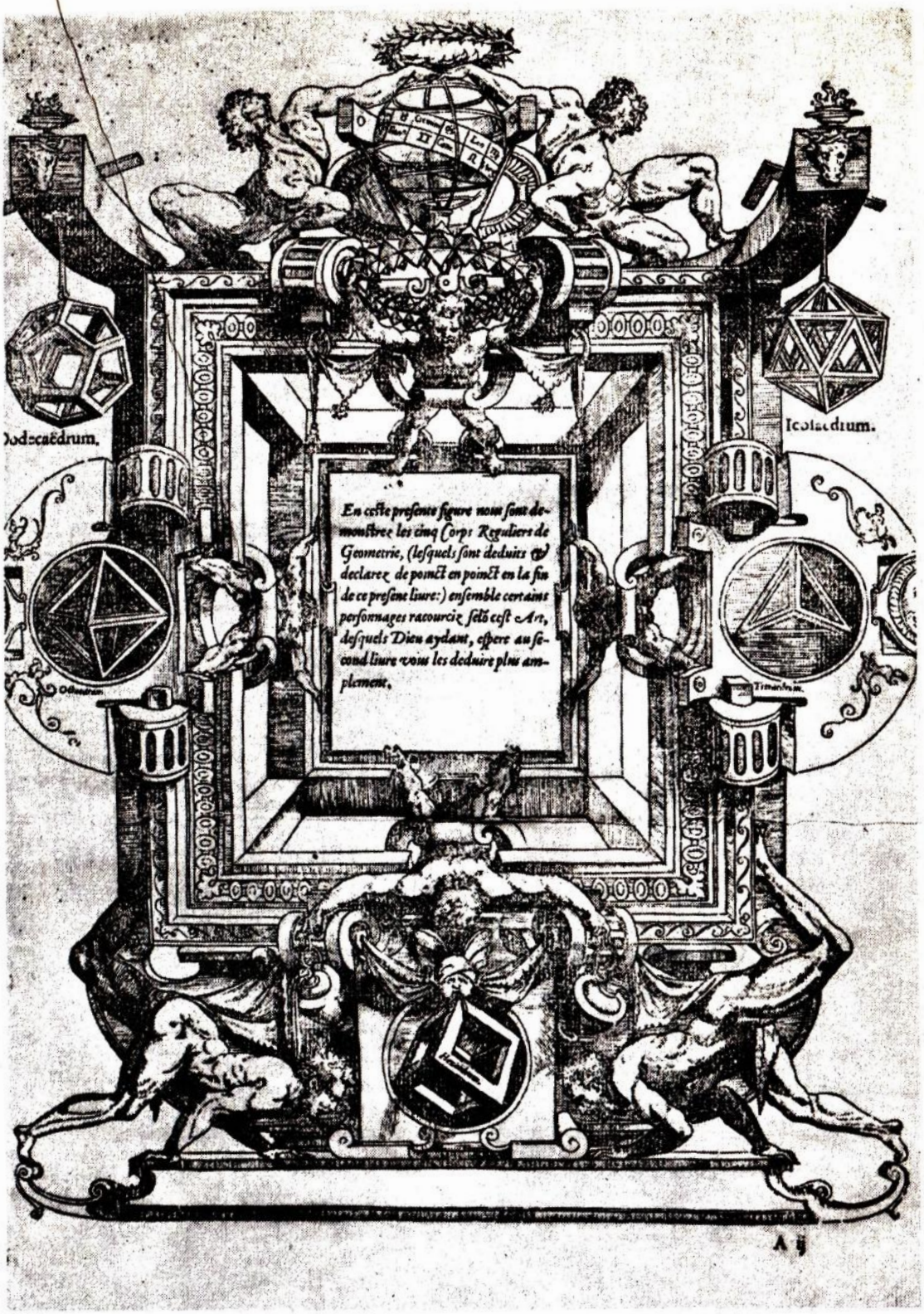
> «Todo se puede expresar con números; sin el número no comprendemos ni conocemos nada» (Filolaos).

Lo más maravilloso es que el matemático tratará como espacios vectoriales a seres que, aparentemente, no tienen nada de geométricos. Por ejemplo, el conjunto de los polinomios enteros, P, y el conjunto de los números complejos, etc.

4. Geometría de la «regla» (geometría proyectiva)

4.1

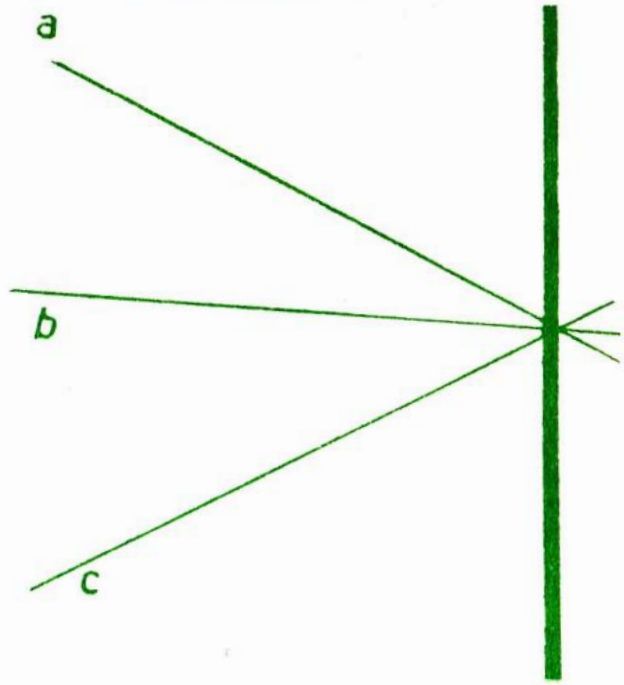
Podemos imaginar una geometría más general que la precedente, no utilizando más instrumento que la **regla.** Es la geometría proyectiva. La veremos muy superficialmente.
Admitimos los conceptos de punto y recta (definidos por determinados axiomas).



La geometría proyectiva es el más importante descubrimiento de los pintores del Renacimiento.

A su esposa que le instaba a reunirse con ella en el lecho, Uccello respondía: «¡Qué bella es la perspectiva!».
Cuando quedó ciego, Piero della Francesca concluía su obra con el primer tratado: «De prospectiva pingendi».

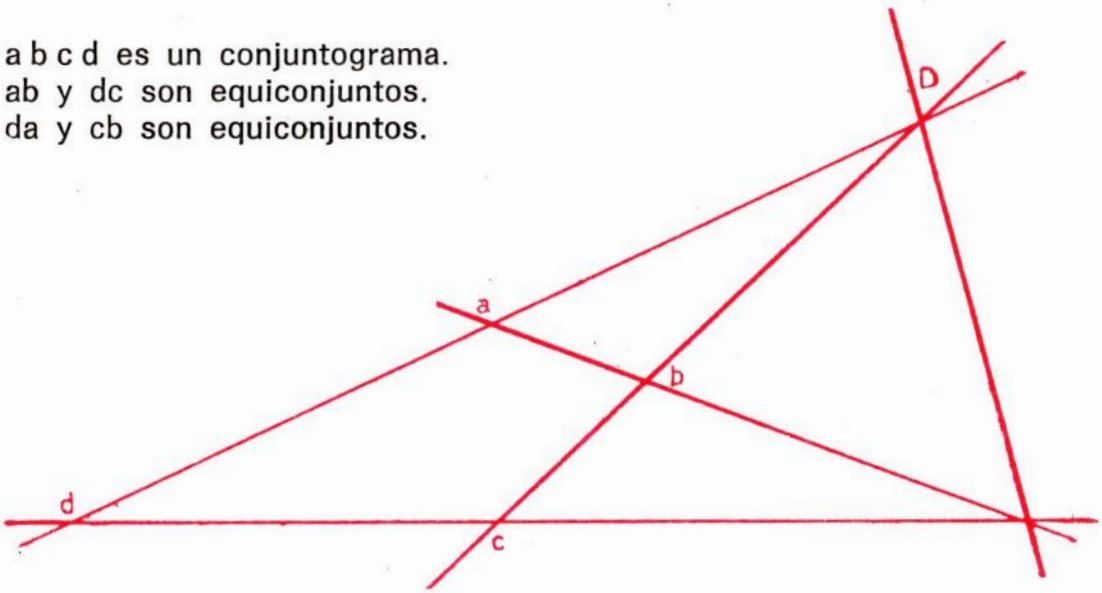
En el plano, **convenimos** en fijar una recta D.
Llamaremos **«conjuntas»** a las rectas que se cortan en un punto D:,



a, b, c se llaman «conjuntas».

La «conjunción» (1) es una relación reflexiva, simétrica y transitiva (como el paralelismo).
Llamamos «conjuntograma» a todo cuadrilátero cuyos lados son «conjuntos» dos a dos.

a b c d es un conjuntograma.
ab y dc son equiconjuntos.
da y cb son equiconjuntos.

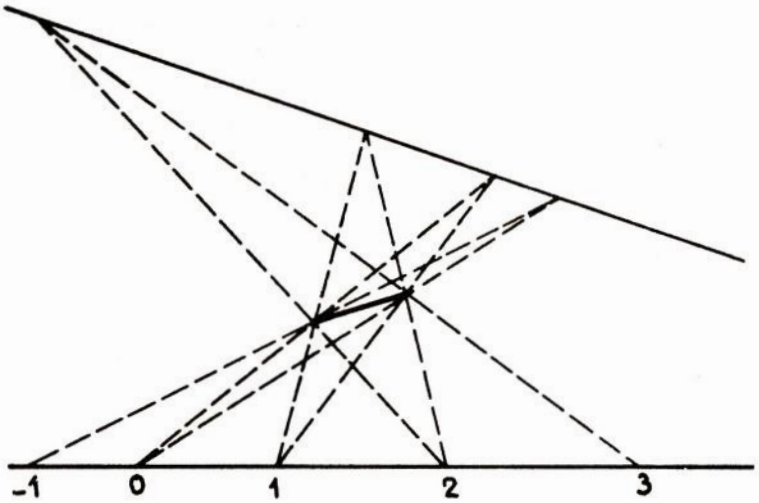


(1) Hemos creado un vocabulario especial con el propósito de simplificar nuestra exposición. Las palabras «conjunción» y «conjuntograma» han sido inventadas para vuestra comodidad.

Llamamos «equiconjuntos» a los lados opuestos de un «conjuntograma».
«Ser equiconjuntos» es una relación reflexiva, simétrica y transitiva (como la equipolencia).

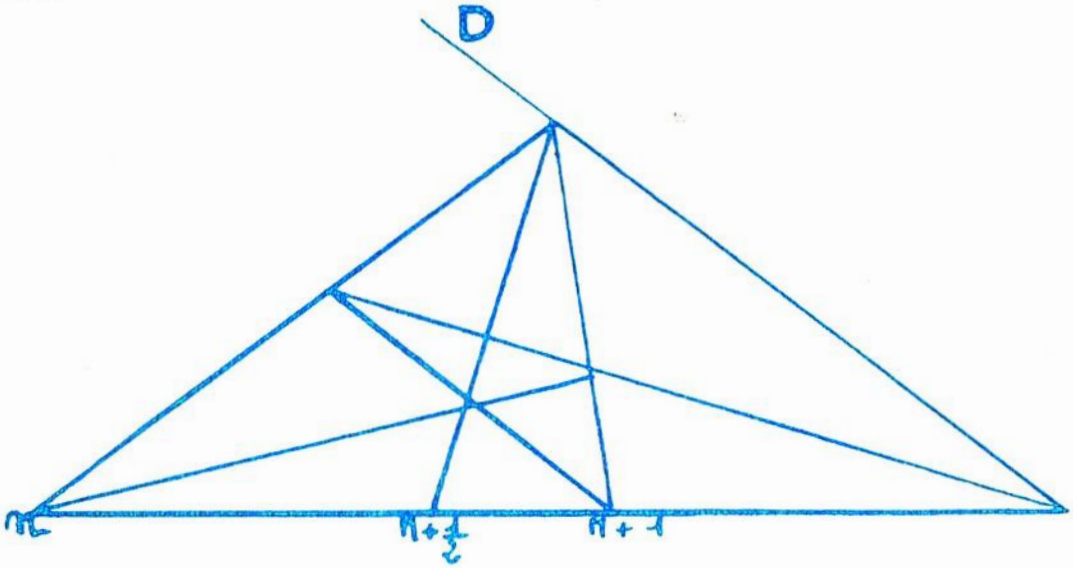
4.2

Con la regla podemos graduar la recta con números enteros.
Define un «orden» en la recta.



4.3

Con la «regla» podemos también señalar los puntos medios entre segmentos.



4.4

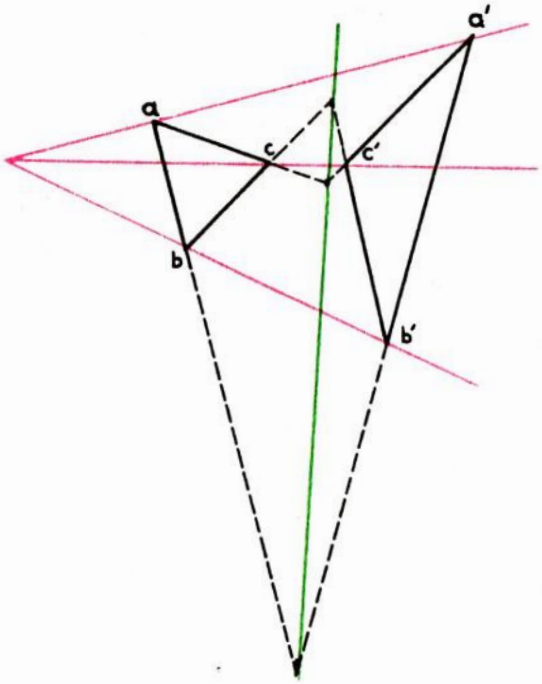
La escala de graduación de una recta podrá ser dividida tan finamente como se desee.
Todo punto de una recta graduada podrá ser asociado biyectivamente con un número real (postulado).

4.5

La graduación de una recta puede ser transportada conjuntamente a otra recta.

4.6

Todo punto del plano puede ser determinado por proyecciones conjuntas sobre dos rectas graduadas.
El plano puede ser considerado como un espacio vectorial.
La regla permite transformar proyectivamente al plano.
La transformación siguiente se llama homología:



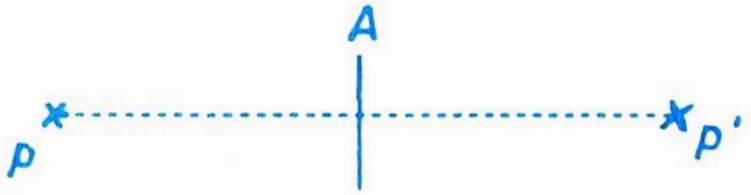
aa′, bb′, cc′ } concurrentes

ac y a′c′, cb y c′b′, ba y b′a′ } conjuntas

5. La geometría de la regla y del plegado (geometría euclidiana)

5.1

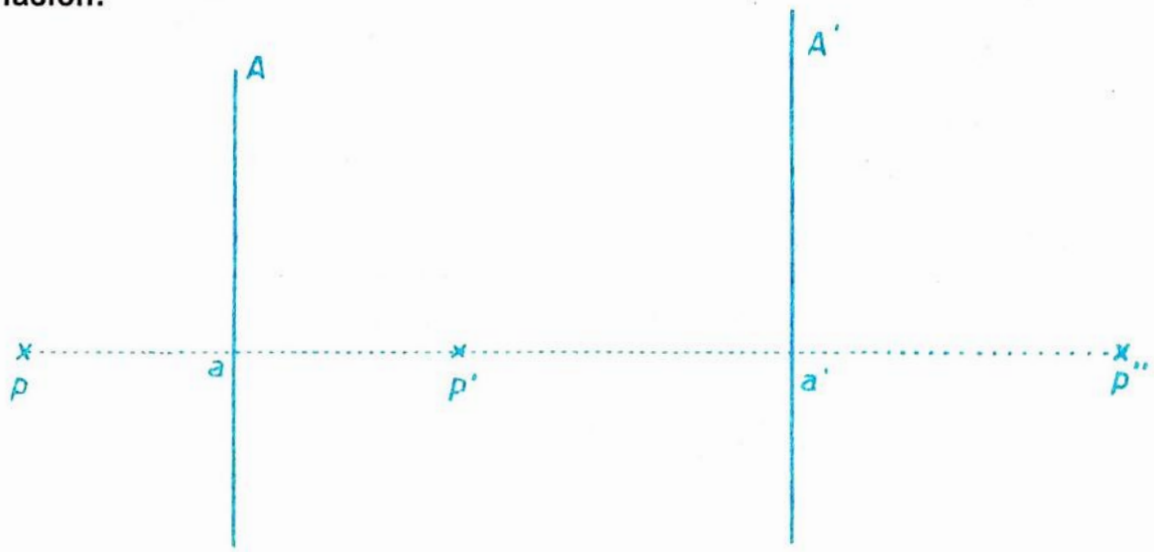
El plegado corresponde en realidad a una simetría axial.
Una simetría axial implica ortogonalidad. La geometría del «plegado» es, pues, la geometría de la regla y de la escuadra (considerada como trasladador de paralelas y trazador de ángulos rectos); o si se prefiere, la geometría de la regla y del compás.



$p' = s(p)$
$p = s^2(p)$

5.2

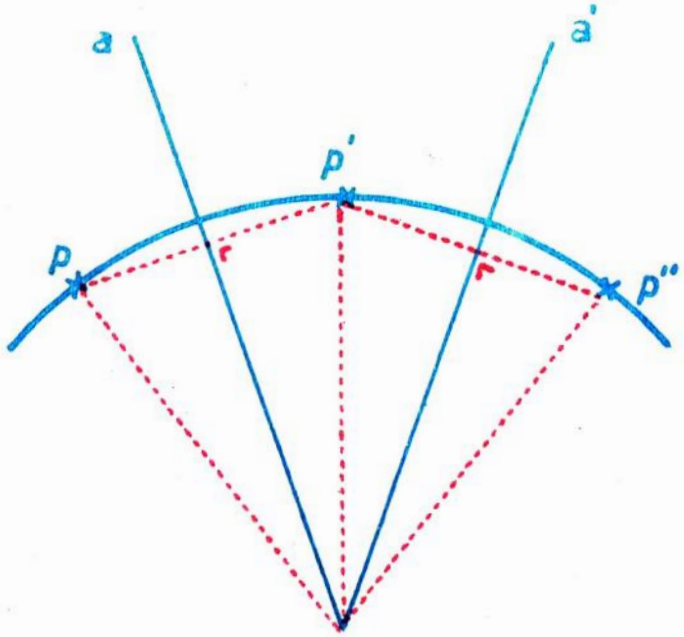
La composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación:



$$
\begin{aligned}
(pp'') &= (pa) + (ap') + (p'a') + (a'p'') \\
&= 2\,(ap') + 2\,(p'a') \\
&= 2\,(aa')
\end{aligned}
$$

5.3

La composición de dos simetrías axiales de ejes no paralelos es una rotación (por definición).



5.4

Una vez definida la rotación, definiremos la «distancia», el ángulo y su medida.

Espacio métrico concebido por un artista románico: nada más que paralelogramos todos iguales y rectángulos todos iguales.

5.5

Las transformaciones del espacio que conservan las distancias se llaman isometrías. Son composiciones de simetrías axiales.

6. Ajuste de las geometrías

6.1

Consideraremos que el espacio está estructurado como un espacio vectorial. En un espacio de n dimensiones, cada punto se asocia con una n-tupla de números reales, que son sus coordenadas.
Con estas n-tuplas se definen determinadas transformaciones cuya composición forma grupo.
La geometría de este espacio es el estudio de los invariantes por esta transformación.
Tomaremos como ejemplo el plano (espacio de dos dimensiones):

$$E_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

6.2

Geometría proyectiva.
Viene definida por la transformación:

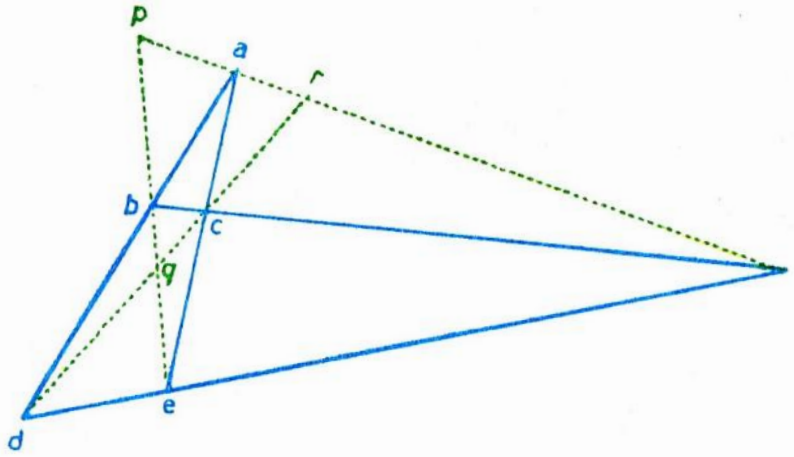
$$x = \frac{ax' + by' + c}{px' + qy' + r}$$

$$y = \frac{dx' + ey' + f}{px' + qy' + r}$$

$$\text{con} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} \neq 0$$

invariantes: recta, punto, producto anarmónico, conjugados armónicos, tangente, polar, etc.

Ejemplo de teorema proyectivo:
Las diagonales de un cuadrilátero se cortan armónicamente:



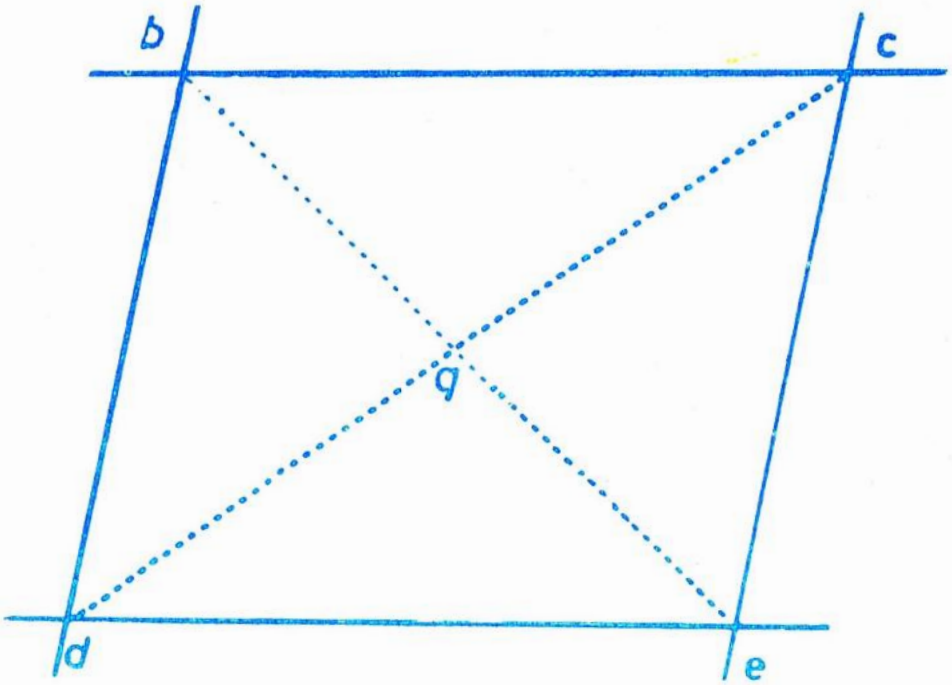
(dcqr) = — 1 (ebqp) = — 1 (afrp) = — 1

6.3

Geometría afín
Viene definida por la transformación:

$$x = ax' + by' + c$$
$$y = dx' + ey' + f \qquad \text{con} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq o$$

invariantes: todos los invariantes proyectivos, paralelismo, producto de sección, punto medio, centro de simetría, asíntota, etc.
Ejemplo de teorema afín:
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio:



Todos los teoremas del espacio proyectivo son válidos para el espacio afín.

Nuestra visión es proyectiva: la máquina fotográfica nos lo prueba. No obstante, miramos «derecho»: así pues, las verticales permanecen verticales.

Curiosamente, el ornamento de los techos hace mucho tiempo que había impuesto una visión proyectiva: aquí las verticales se reúnen en el centro de la bóveda.

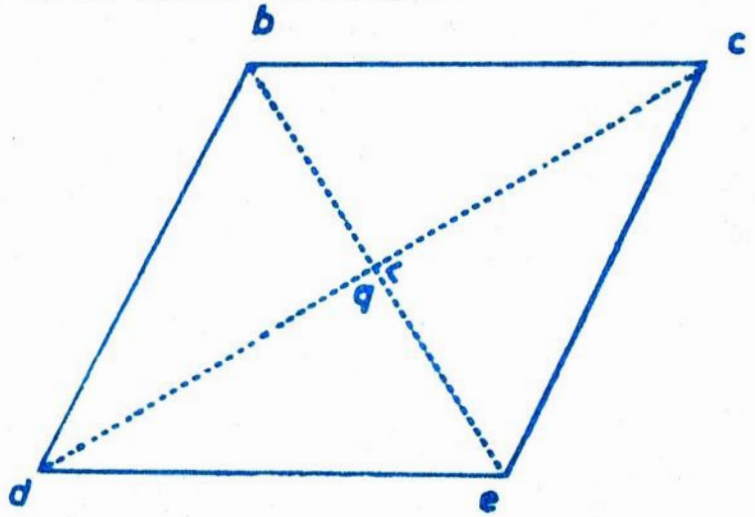
Los Embajadores de Holbein.
Detrás de ellos, la medida del tiempo: relojes de sol, aparatos de uso astronómico, un laúd.
Un laúd que tiene una cuerda rota.
Y en primer plano, un huso claro, que atraviesa el cuadro, fantasma incomprensible de una cuarta dimensión.
La transformación proyectiva y total de un cráneo. Para volverlo a su forma primitiva hay que mirar horizontalmente el cuadro de la derecha hacia abajo. El hombre mide el tiempo, pero el tiempo mide al hombre.

6.4

Geometría euclidiana.
Viene definida por la transformación:

$$x = ax' + by' + c$$
$$y = dx' + ey' + f \qquad \text{con } a^2 + d^2 = b^2 + e^2 \neq 0$$

invariantes: todos los invariantes afines, ángulos, ortogonalidad, circunferencia, equilateralidad, ejes de simetría, etc.
Ejemplo de teorema euclidiano:
Las diagonales de un rombo son ortogonales:



Todos los teoremas del espacio afín son válidos para el espacio euclidiano.

6.5

Geometría métrica.
Viene definida por:

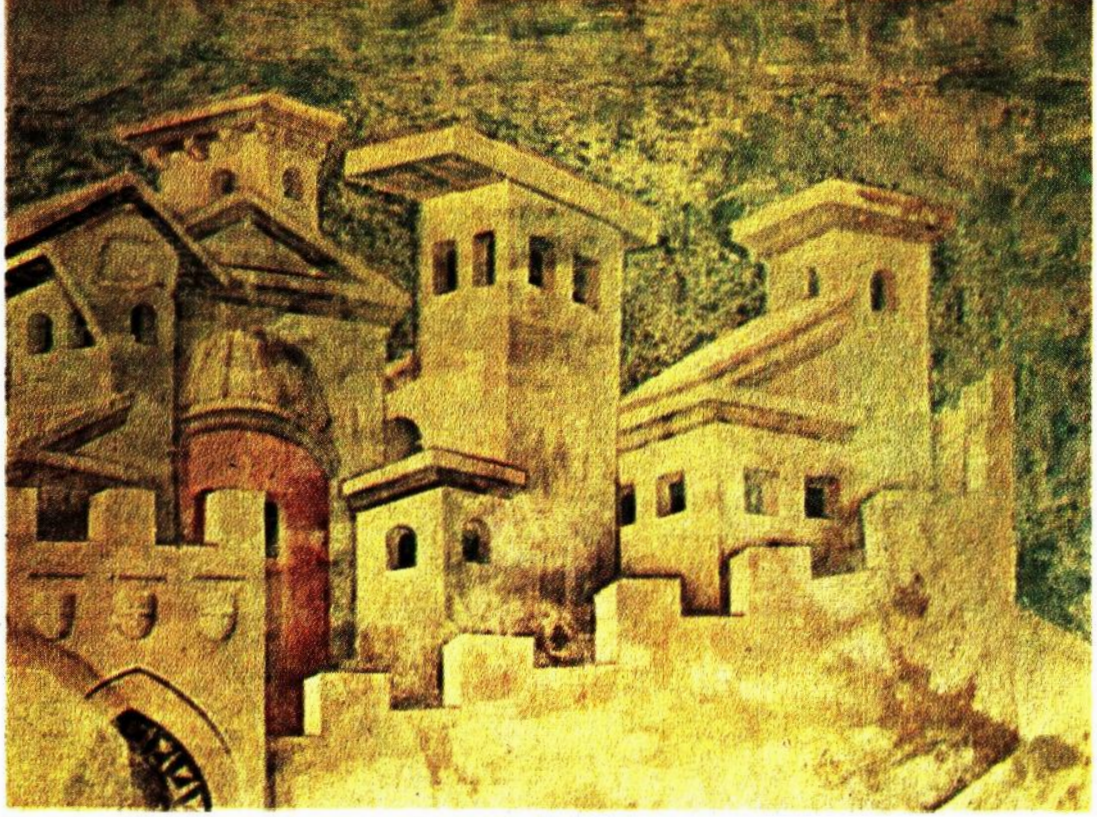
$$x = ax' + by' + c$$
$$y = dx' + ey' + f \qquad \text{con } a^2 + d^2 = b^2 + e^2 = 1$$

invariantes: todos los invariantes euclidianos, distancia, área, volumen.

7. La metafísica euclidiana

7.1

El rigor de la exposición euclidiana no es más que aparente. Euclides mezcló las propiedades sin estructurar el doble movimiento de abstracción y concretización, movimiento unido a la reducción o a la ampliación del número de axiomas y definiciones.
Introdujo el «desplazamiento» como una evidencia sin advertir que las propiedades que creyó demostrar eran precisamente las que definen estos desplazamientos.



Espacio afín de Giotto (1266-1337), pintor gótico: ningún rectángulo, pero sí paralelógramos.

Espacio perspectivo de Masolino (1383-1447) del principio del Renacimiento. Las horizontales paralelas se cortan en la línea del horizonte; las verticales permanecen paralelas.

No concibió el «desplazamiento» como una transformación particular del espacio susceptible de ser generalizado en otras transformaciones. No obstante, gozaba de la «visión» como todos nosotros y podía darse cuenta de que la geometría del ojo era «proyectiva» y no «métrica». El monumento de los trece libros euclidianos fue una obra maestra en su tiempo. Pero, ahora, es una obra maestra arqueológica.
Nada es menos natural que el encadenamiento de los teoremas euclidianos; no es más que una anécdota ridícula en la pequeña historia de las matemáticas como la de su redescubrimiento por el pequeño Pascal.
«Privado de la geometría por su papá, el pequeño Blas habría encontrado él solo las primeras proposiciones de Euclides.»
Esto corresponde a una visión institucionalizada de la matemática considerada como «natural», con el mismo título que la moral, la religión o la administración pública.
Desde el siglo XVII, el hombre ha conquistado cada día más libertades. La más reciente es el derecho a estructurar el edificio geométrico de otro modo y no por la conformidad escrupulosa con una palabra pseudorrevelada.

7.2

Vamos a fijarnos en particular en una de las concepciones euclidianas más tradicionales, la del espacio infinito, para comprobar que está cargada de una metafísica temeraria, aunque muy disimulada.
En Euclides, el plano se presenta como un universo. En él se considera la geometría desde un punto de vista «intrínseco» (sin salir del plano). Se introducen muchos postulados y en particular éste tan conocido de la paralela (1).
El cilindro, el cono y la esfera se representan como «sumergidos» en un espacio de tres dimensiones, el universo euclidiano. Son estudiados desde un punto de vista extrínseco (se les observa desde fuera), es decir, que no son del universo.
Por el contrario, el espacio de **tres** dimensiones es el único del universo.
Su estructura es considerada como absoluta. No se dan cuenta los geómetras euclidianos que este espacio podría tener otras propiedades que las que se derivan de los postulados.

7.3

Para enseñaros la necesidad de una puesta a punto de la cuestión, trabajamos en espacios de dos dimensiones que podréis considerar más cómodamente desde un punto de vista extrínseco.

---

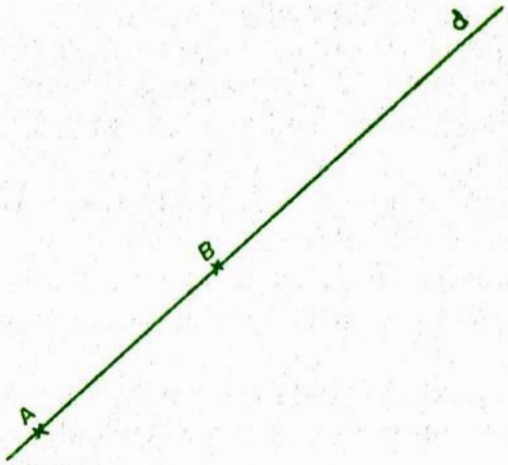
(1) Recordémoslo: por un punto no puede pasar más que una sola paralela a una recta dada.

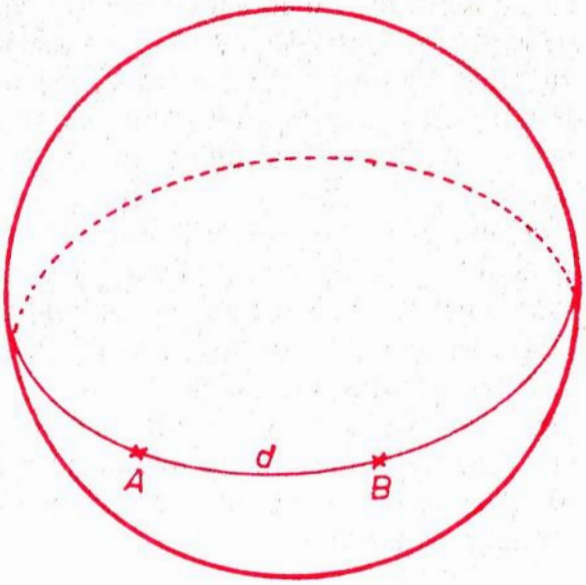
En el plano euclidiano

Por dos puntos distintos podemos hacer pasar una sola recta.

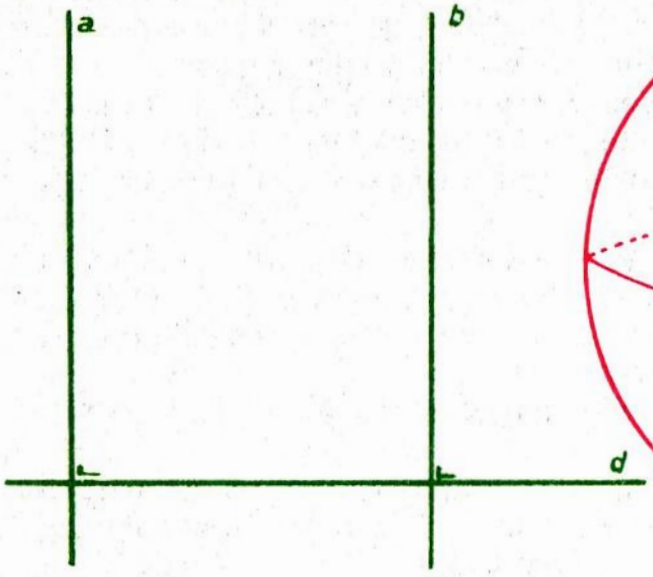
Sobre la esfera [1]

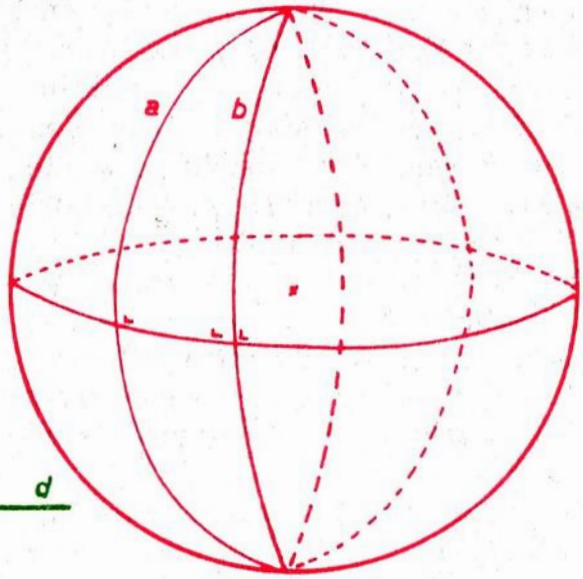
Por dos puntos distintos, no antípodas, podemos hacer pasar un solo círculo máximo.





La recta y el círculo máximo son cada uno la «geodésica» (el camino más corto entre dos puntos) de su espacio:



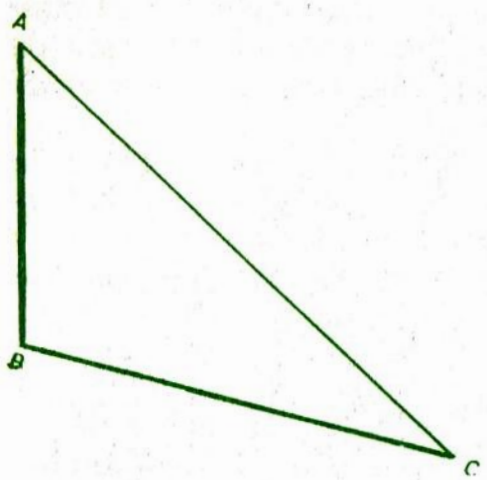


Dos rectas perpendiculares a una tercera son siempre paralelas entre sí.

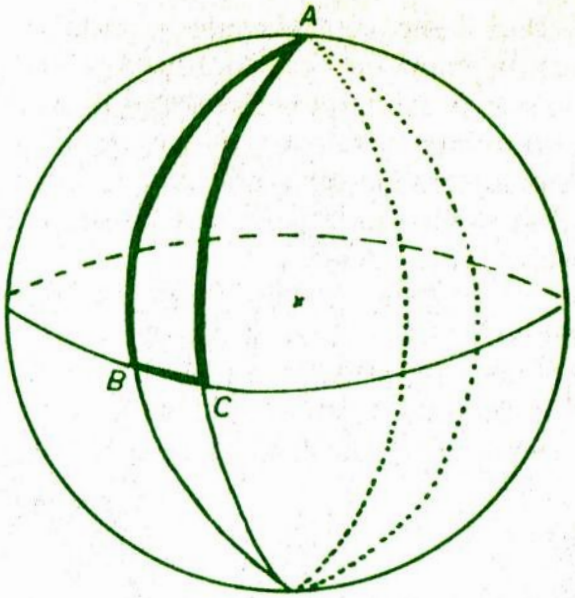
No hay círculos máximos paralelos.

La esfera es un espacio sin geodésicas paralelas.

(1) Nuestro vocabulario está impregnado de la concepción «euclidiana». Decimos «en» el plano porque el plano puede ser un universo; por el contrario, decimos «sobre» la esfera porque la consideramos fuera de ella misma, desde un punto de vista extrínseco.



La suma de los ángulos de un triángulo es **igual** que dos rectos.



La suma de los ángulos de un triángulo es **mayor** que dos rectos.

7.4

Para transformar un E_2 en un «plano euclidiano» es preciso atribuirle un cierto número de axiomas. Los «axiomas» no son, como se pretendía antiguamente (1), «verdades evidentes que no necesitan demostración». Son, en realidad, los criterios que hemos convenido en exigirle a un ser para permitirle llevar un cierto «nombre».
Podríamos convenir en llamar «plano» a un conjunto de puntos (o de rectas) en el que el sistema de axiomas conduciría a la no existencia de paralelas y en el que la suma de los ángulos de un triángulo sobrepasaría los dos rectos.

7.5

Pero entonces, diréis, es la experimentación de lo que nosotros llamamos «plano» y que debe permitirnos reconocer los axiomas necesarios para su definición. Si, por ejemplo, en lo que llamo plano, trazo

(1) La ilusión de la «verdad evidente» proviene de lo que se sabe de una manera experimental sobre los seres que van a llevar tal nombre. Si os enseño un ranúnculo, y os digo: «el ranúnculo es amarillo», tomaréis quizás este enunciado como una verdad evidente porque, en realidad, el amarillo es uno de los criterios de definición del ranúnculo. Llamo «ranúnculo» a un ser que, evidentemente, es amarillo. No llamo ranúnculo a un aciano o a un amapola.

lo que llamo un triángulo y mido lo que llamo los ángulos comprobaré que la suma de los ángulos me da, efectivamente, dos rectos.
Habría mucho que discutir sobre lo dicho anteriormente. Y ante todo comprobar que, por la imperfección de los instrumentos utilizados (transportador, espesor de los trazos del lápiz, lectura a ojo, etc.) no tendremos nunca una verificación absoluta sino más bien una verificación aproximada.
En el espesor de un trazo de lápiz hay lugar para una infinidad de medidas. Lo que la comprobación nos enseña es que nuestras hipótesis son satisfechas en el límite de la aproximación requerida.
Y está muy bien así. Pero esto no transforma nuestras hipótesis en verdades. A lo sumo, son convenciones cómodas.

7.6

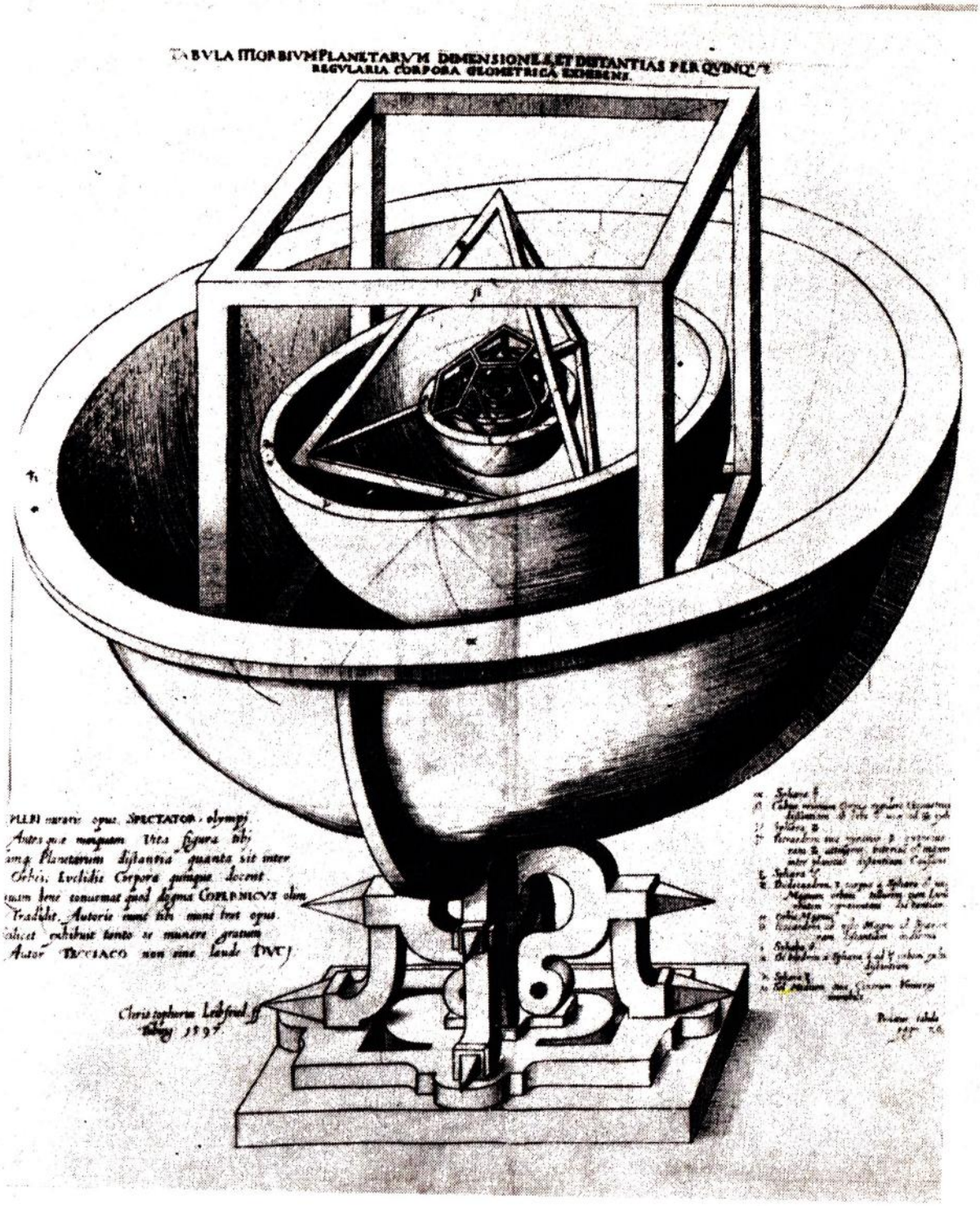
Imaginad una esfera de acero de radio extremadamente grande con respecto a la dimensión del hombre; por ejemplo, una esfera de un radio de 1000 km (si esto no es suficiente para convenceros, multiplicad por 10 tantas veces como queráis). Imaginad también que, en esta misma esfera, recortamos un pequeño casquete de un diámetro de 10 cm. ¿Pensáis ser capaces de distinguir si este trocito de acero es esférico o plano? De todas formas, será «más sencillo» utilizar esta superficie de acero como si fuese plana en el sentido tradicional, es decir, euclidiana. Pero si os pregunto lo que esta superficie es «en sí», en su totalidad, será imposible decidir sI es un plano, una esfera, un cono, un elipsoide o cualquier otra clase de superficie extrínsecamente imaginable.
En otras palabras, si consideramos el trocito de acero como un fragmento del universo, nuestro parecer sobre su estructura total absoluta es de orden «metafísico», y nada nos permite considerarla como euclidiana o no euclidiana de cualquier clase que sea.

7.7

El espacio de tres dimensiones, en el que estamos intrínsecamente sumergidos, nos lleva a una experimentación irrisoria.
En este pequeño volumen de espacio, los axiomas de la geometría euclidiana se imponen muy probablemente por su comodidad, pero nunca por su «verdad».

7.8

Y si, pensemos un poco, nuestro universo de tres dimensiones era intrínsecamente análogo a nuestra esfera (concebida como un espacio de dos dimensiones) nuestro universo no sería infinito; habría forma de darle la vuelta, la cantidad de energía que contendría sería limitada, etc.



He aquí el parecer metafísico de Kepler: «El sistema solar está construido según el modelo por el ajuste de cinco poliedros regulares y de sus esferas inscritas y circunscritas.»
Fue un sueño del matemático poeta que, por otra parte, descubrió las leyes del movimiento elíptico de los planetas.

¿Y si era, además, una cosa distinta que el hiperplano euclidiano o la hiperesfera riemanniana (1)?
¡Está permitido soñar un poco, después de todo! Y podemos preferir los sueños que nos ahorren los horrores del infinito.
Precisamente, las aportaciones de la astronomía y de la física nos han obligado a abandonar la geometría euclidiana tan pronto como las distancias se han vuelto suficientemente grandes. Es una consecuencia de la relatividad generalizada (2) el hecho de que el universo no sea euclidiano.
La geometría euclidiana tradicional proporciona, pues, la ilusión de un racionalismo victorioso. Nos lleva a una cierta imagen del universo infinito. No representa más que un **criterio metafísico.**

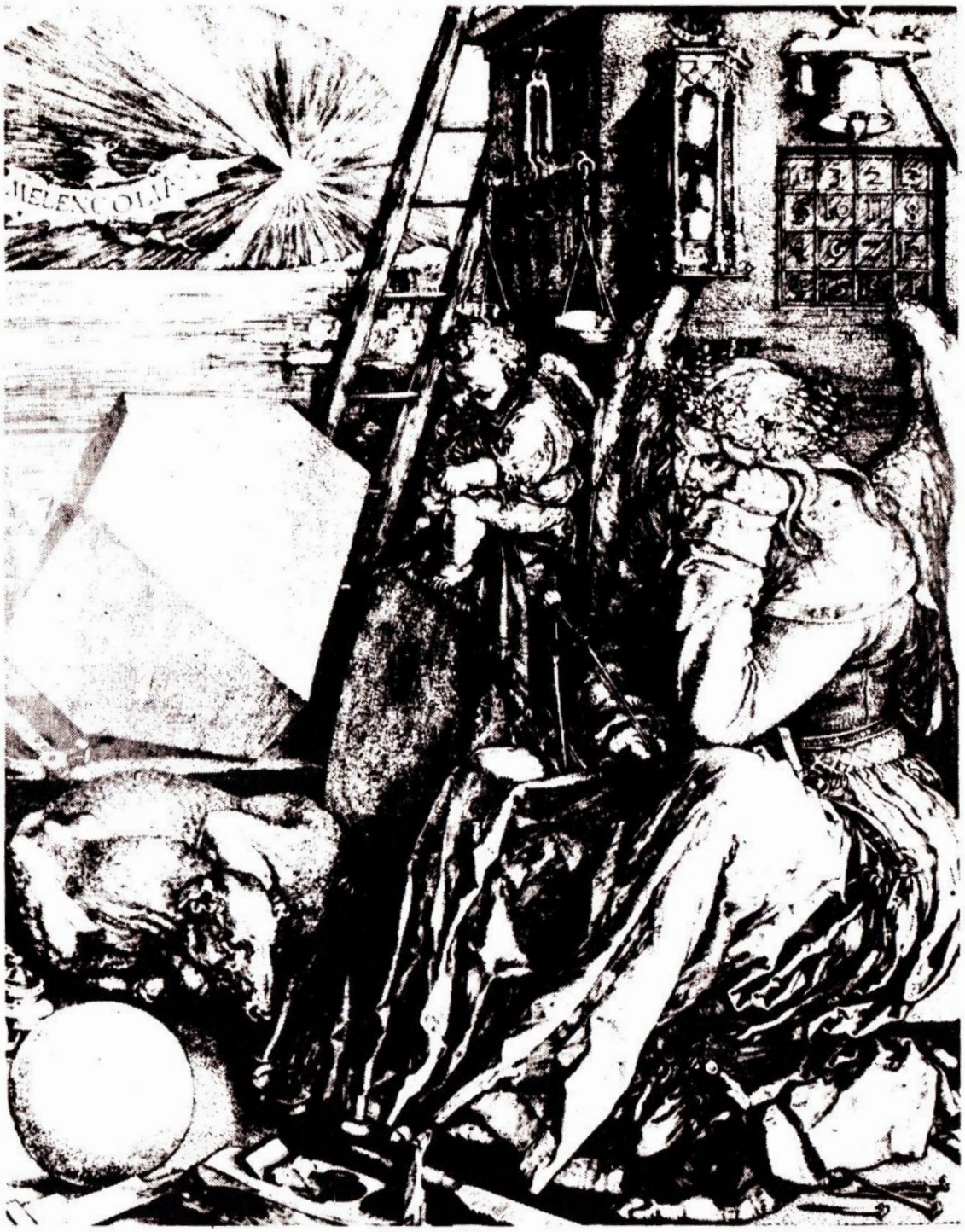
7.9

Para terminar, os proponemos la reflexión siguiente:
Los pueblos han imaginado siempre que el Creador utilizaba su propia tecnología. Los que conocían la agricultura han considerado al demiurgo como un gran jardinero. Los que practicaban el arte del alfarero han contado que Dios hizo al hombre al torno. Dios fue arquitecto, geómetra, cazador o guerrero según las proyecciones que el hombre hacía de sí mismo por su propia ignorancia.
Hoy, la apuesta está todavía en pie. Pero lo está en el lenguaje de la tecnología actual, es decir, en el lenguaje del ingeniero, del físico y del matemático.
Este lenguaje debe ser conocido por quien quiera arriesgar su criterio. Pero, a pesar de la novedad de las formas, el hombre conserva siempre la libertad de opinar.

---

(1) Riemann (1826-1866) concibió una geometría de la hiperesfera y la generalizó después a una métrica cualquiera.

(2) Einstein (1879-1955) publicó en 1913 la obra más importante del siglo XX sobre la teoría de la relatividad restringida y general.



¡De nuevo el Angel de la Melancolía!
«¿Cómo poner un poco de orden en todo esto?», suspira.
«¡Con la Matemática Moderna, seguro!»

APENDICE

SIMBOLOS MATEMATICOS
utilizados en esta obra

$\in$: pertenece a

$\notin$: no pertenece a

$\ni$: comprende a

$\not\ni$: no comprende a

$\supset$: contiene a

$\not\supset$: no contiene a

$\subset$: está contenido en

$\not\subset$: no está contenido en

$\cap$: intersección

$\cup$: unión

$\mathbb{N}\mathbb{Z}\mathbb{Q}$: signos convencionales de «conjunto»

$\varnothing$: conjunto vacío

$\{a\}$: singleton a

$\{a, b\}$ par a b

(a, b) : pareja a b

$=$: igual a

$\neq$: no puede ser igual a

$\Leftrightarrow$: equvalente a

$\not\Leftrightarrow$: no equivalente a

$\equiv$: idéntico a

$\simeq$: aproximadamente

$>$: mayor que

$<$: menor que

$\not>$: no es mayor que

$\not<$: no es menor que

$\geqslant$: puede ser mayor o igual

$\leqslant$: puede ser menor o igual

$\setminus$: menos (diferencia)

$\triangle$: diferencia simétrica

$\otimes$: suma disyuntiva

$\times$: producto cartesiano

★ : star (indica una operación cualquiera)

$\wedge$: conjunción (producto lógico)

$\vee$: disyunción (suma lógica)

$\between$: se superpone, se imbrica a (conjuntos no disyuntivos)

$\not\between$: no se superpone, no se imbrica a (conjuntos disyuntivos)

$\#$: número cardinal de

$|$: tal que

ssi : si y sólo si

$\sim$: negación

$-$: complementación

$\Rightarrow$: implicación

$\mathcal{J}$: contradicción o inepcia

$\mathcal{T}$: evidencia o tautología

$(\ )^{-1}$: recíproco o simétrico

$\circ$: redondo (composición de dos relaciones)

BIBLIOGRAFÍA

Abellanas Cebollero, Pedro: *Introducción a la Matemática.* Madrid, s. f. VII + 299 p.

Aizpun, Alberto: *Teoría y didáctica de la Matemática actual.* I. (Plan 1967). Madrid, s. f. 284 p.; II. Madrid, s. f. 188 p.

Allen, R. G. D.: *Introducción a la Matemática moderna.* Barcelona, 1964. 288 pp.

Allendoerfer, Carl y Oakley, Cletus: *Introducción moderna a la matemática superior.* Madrid, 1967. 553 p.

Bailey, C. A. R.: *Conjunto y lógica.* I. Barcelona, s. f. 132 p.; II. 104 p.

Bruño: *Matemática moderna.* Madrid, 1966. 344 p.

— *Matemática moderna.* Madrid, 1970. 182 p.

— *Matemática moderna. Guía didáctica.* 4.º año. Madrid, 1970. 184 p.

Casulleras Pagés, Juan: *Matemática moderna* (Plan 1967). Madrid, 1970. 182 p.

Courant, R., y Robins, H.: *¿Qué es la matemática?* 5.ª ed. Madrid, 1967. 574 p.

Dienes, Z. P.: *Los primeros pasos en matemáticas. I: Lógica y juegos* lógicos. Barcelona, s. f. 144 p.

— *La matemática moderna en la enseñanza primaria.* Barcelona, s. f.

— *Los primeros pasos en matemática. Exploración del espacio y práctica de la medida.* Barcelona, s. f. 128 p.

— *Bloques Multibase para Matemática moderna.* Barcelona, s. f. 1336 piezas.

— *Bloques lógicos para Matemática moderna. Material de iniciación a las nociones de lógica y conjuntos.* Barcelona, s. f.

Dienes, Z. P., y Golding, E. W.: *Conjuntos, números y potencias.* Barcelona, s. f. 112 p.

— *La geometría a través de las Transformaciones. I. Topología, geometría proyectiva y afín.* Barcelona, 1969. 168 p.; *II. Geometría euclidiana.* Barcelona, 1969. 168 p.; *III. Grupos y condensados.* Barcelona, 1970. 2 láminas.

Fletcher, T. J.: *Didáctica de la Matemática moderna en la Enseñanza Media.* Barcelona, s. f. 472 p.

García Pradillo, Julio: *Matemática de siempre. Didáctica de hoy.* I-II. Madrid, 1968. 310 + 192 p.

Majó Torrent, Juan: *Estadística matemática y cálculo numérico gráfico.* Barcelona, 1964. 288 p.

Matthews, G.: *Matrices. Principios de Matemática moderna.* Barcelona, s. f. 2 v.

Papy, G.: *Matemática moderna.* I. Madrid, 1968. 480 p.

Puig Adams, Pedro: *Cálculo integral.* Madrid, 1968. 322 p.
— *Ecuaciones diferenciales.* Madrid, 1967. 429 p.
— *Curso de Geometría Métrica. I-II. Elementos y Complementos.* Madrid, 1965-69. 332 + 380 p.
Regletas Teide: *Acoplables y de colores. Material para la enseñanza de la matemática.* Barcelona, s. f.
Reynols, J. A. C.: *Forma, tamaño y lugar.* Barcelona, 1968. 92 p.
Rey Pastor, Julio: *La Matemática Superior. Introducción a la Matemática.* Madrid, 1951. 362 p.
Rodríguez Vidal, Rafael: *Introducción a la Matemática superior.* Madrid, s. f. 380 p.
— *Fórmulas. Matemática moderna.* Barcelona, 1970. 192 p.
Romero Méndez, Rubén: *Matemática histórica.* Madrid, s. f.
Sherlock, A. J.: *Estadística y probabilidades.* Barcelona, s. f. 134 p.
S. M. - Marcos, C., y Martínez, J.: *Matemática moderna.* I-II-III-IV. Plan 1967. Madrid, 1970. *Reválida elemental.* 4.º año. Madrid, s. f.
Trejo, César A.: *Matemática elemental moderna.* Madrid, s f. 516 p.
Vila Mitjá, Antonio: *Ejercicios de Matemática moderna.* Barcelona, s. f. 138 p.

INDICE DE MATERIAS

Introducción 9

CAPÍTULO I

Conjunto y elementos 13

1. — Los significados en la lengua usual y en la lengua matemática 14
2. — Una oposición: conjunto/elemento 16
3. — La Pertenencia 18
4. — Escritura 20
5. — Ideogramas de Euler-Venn 23
6. — Orden de los elementos 25
7. — Repetición de un signo 26
8. — Conjunto de significandos y conjunto de significados . 28
9. — El elemento y los objetos que se asocian a él . . . 30
10. — De la libertad de asociación 33
11. — Formación por enumeración 36
12. — Definición por caracterización 37
13. — Conjuntos correctamente definidos 40
14. — Conjuntos objetivos y conjuntos subjetivos 42
15. — Cardinal de un conjunto 44
16. — Los pares 45
17. — Los singletons 48
18. — Conjunto vacío 54
19. — Los conjuntos de conjuntos y su jerarquía 56
20. — La teoría natural y la teoría axiomática 60

CAPÍTULO II

Partes de un conjunto: la inclusión 63

1. — Subconjunto e inclusión 63
2. — Pertenencia e inclusión 67
3. — La inclusión como enunciado de ausencia 69
4. — Reflexividad de la inclusión 73
5. — Antisimetría de la inclusión 74
6. — Transitividad de la inclusión 76
7. — Inclusión del vacío 79
8. — Negación de la inclusión 80

9. — La disyunción y la imbricación 81
10. — Conjunto de las partes 83
11. — Partición de un conjunto 85
12. — Partición de los triángulos del plano 86
13. — Partición de los cuadriláteros del plano 90
14. — Aplicación lingüística: la caracterización 97
15. — Aplicación lingüística: el predicado 99
16. — Aplicación lingüística: los artículos 100
17. — Aplicación lingüística: las acepciones de «ser» . . . 101
18. — La deducción lógica 103

CAPÍTULO III

Álgebra de los conjuntos 109

1. — ¿Qué es una operación numérica? 109
2. — ¿Qué es una operación en general? 115
3. — Operaciones en un conjunto de conjuntos 118
4. — La intersección 119
5. — La sustracción 125
6. — La unión 126
7. — La diferencia simétrica 128
8. — Propiedades generales 130
9. — Tautologías y no tautologías 131
10. — Referencial 134
11. — Complementación 136
12. — Operaciones que se pueden realizar con dos conjuntos . 139
13. — Dualidad interna 142
14. — Vuelta a nuestras antiguas «representaciones gráficas» 143
15. — Bloques lógicos 145
16. — Fichas lógicas (tarjetas perforadas) 145

CAPÍTULO IV

La lógica como una álgebra de enunciados 149

1. — El enunciado, elemento de una álgebra 151
2. — Enunciados, lexis y condiciones 153
3. — Álgebra lógica de los enunciados 155
4. — Conjunto de operaciones lógicas 161
5. — La implicación 164
6. — La equivalencia 169
7. — La deducción 169
8. — Los llamados lugares geométricos 171
9. — Aplicación lingüística: las conjunciones de coordinación. 172
10. — La lógica de las máquinas 175
11. — De la importancia de ser mentiroso 178

CAPÍTULO V

Las relaciones 183

1. — El asesinato considerado como una relación binaria . . 183
2. — La pareja y el par 188
3. — El producto cartesiano de dos conjuntos 191
4. — Definición de una relación binaria 196
5. — Relaciones particulares 201
6. — Enunciados relacionales 204
7. — Relaciones con *n* términos 205
8. — Composición de dos relaciones 205
9. — Propiedades de las relaciones 210
10. — Relaciones y correspondencias 225
11. — ¿El número antes que la relación? ¿La relación antes que el número? 229

CAPÍTULO VI

¿Qué es una estructura? 233

1. — Aritmética en la pequeña semana 235
2. — La estructura en general 241
3. — Estructura de grupo de orden 4 244
4. — Grupo del rectángulo (grupo de Klein) 247
5. — Grupo del triángulo equilátero 251
6. — La estructura de grupo 252
7. — Las estructuras de la matemática 256

CAPÍTULO VII

Plan para el estudio elemental de los conjuntos numéricos . . 265

1. — Conjunto de los números naturales *N* 267
2. — Conjunto de los números enteros *Z* 273
3. — El conjunto de los números racionales *Q* . . . 274
4. — Conjunto de los reales y de los complejos 275
5. — Otros conjuntos 275

CAPÍTULO VIII

Las estructuras del espacio geométrico 277

1. — Los instrumentos divinos 279
2. — La geometría del trasladador (geometría afín) . . . 292
3. — El espacio vectorial 300
4. — Geometría de la «regla» (geometría proyectiva) . . 302

5. — La geometría de la regla y del plegado (geometría euclidiana) 307
6. — Ajuste de las geometrías 310
7. — La metafísica euclidiana 315

Apéndice 325

Símbolos matemáticos utilizados en esta obra 326

Bibliografía 328

Iconografía 334

ICONOGRAFIA

La Templanza, de Pierre Brueghel el Viejo. Biblioteca Albertina, Bruselas 5

Miniatura de la Biblia de Pierre le Mangeur. Siglo XIV. Biblioteca Nacional, París 17

Cartel de reclutamiento (Inglaterra, 1914-18) 19

Mosaico de Delos 21

Mosaico. Museo de Susa (Túnez) 22

Tumba de Filónico y Demetrio. Museo Británico, Londres . . . 22

El Ángel de la octava esfera. Grabado anónimo florentino del siglo XV. Galería Nacional de Arte, Washington 27

Unicornio en cautividad, tapiz. Museo Metropolitano de Arte Col. John D. Rockefeller 50

Alicia en el País de las Maravillas. Ilustración original de John Tennien 104

El juramento de los Horacios, de David. Museo del Louvre, París. 186

Cartel de reclutamiento (Inglaterra, 1914-18) 189

La justicia y la venganza persiguen el crimen, de Prud'hon. Museo del Louvre, París 207

Marilyn Monroe ante un espejo 221

Escala de las Edades. Imágenes de Epinal. Impreso por Pellerin . 223

El árbol rosa, el árbol plateado. Manzano en flor. Ediciones Hnos. Fabbri. Stedelijk Museum, Amsterdam 242-243

De humani corporis fabrica (1543), de Andrés Vesalio . . . 253

Dibujo cubista, de Luca Cambiaso (1527-1585). Museo de los Oficios, Florencia 255

Verano, de Arcimboldo. Kunsthistorisches Museum, Viena . . 261

Retrato del inventor. Grabado de la Biblioteca Nacional, París . 262

Paisaje antropomorfo, del Maestro de los Países Bajos meridionales. Siglo XVI. Col. F. Heulens, Bruselas 263

Dios Padre, de una Biblia francesa del siglo XIII. Biblioteca Nacional, Viena. Cod. 2554 282

Geométrica y Perspectiva, 1555, de Lorenz Stoër. Biblioteca Nacional, París 303

Libro de persepctiva, 1560, de Jean Cousin Père. Biblioteca Nacional, París 304

La Jerusalén celeste, del Maestro Lombardo, anónimo de la segunda mitad del siglo XI. San Pietro al Monte 309
Las columnas del templo de Neptuno, Paestum 312
San Joaquín y santa Ana con la Virgen niña, de un mosaico de la iglesia Kariye-Camii, Estambul 313
Los embajadores franceses en la corte de Inglaterra, de Holbein, 1533. National Gallery, Londres 314
Banquete de Herodes, del baptisterio de Castiglione Olona . . 316
San Francisco dando su manto a un pobre, fragmento de un fresco de Giotto 316
Sistema de Képler. Documento de la Biblioteca Nacional, París . 321

Los dibujos fueron realizados por Alain Roussel
y las fotografías son de Jean-François Moullec.

DAIMON

- Las operaciones de " conjuntos " son la base de una nueva forma de contemplar la vida.

- La Matemática Moderna no es un invento diabólico para fastidiar a los niños y poner en evidencia a los mayores.

- Es el lenguaje de hoy y, sobre todo, del futuro: el lenguaje de los ordenadores.

- Este libro se ha escrito pensando sobre todo en los adultos. Va dirigido:

  —A los padres que deseen iniciar un diálogo constructivo con sus hijos.

  —A los profesores, a quienes brinda el sistema de salvar muchos escollos.

- **DAIMON** lo publica para divulgar una ciencia que enseña a razonar y a juzgar con sentido crítico cuanto nos rodea.

EDICIONES DAIMON - MANUEL TAMAYO

MADRID - BARCELONA - MEXICO